



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

GENERACIÓN DE MASA DE NEUTRINOS POR MECANISMO SEE-SAW TIPO II

Juan Pablo Rubio Ospina

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Física
Bogotá D.C, Colombia
2011

**GENERACIÓN DE MASA DE NEUTRINOS POR
MECANISMO SEE-SAW TIPO II**

Juan Pablo Rubio Ospina

Trabajo Final presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias-Física

Director:
Doctor, Fredy Alexander Ochoa Pérez.

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Física
Bogotá D.C, Colombia
2011

Resumen

Se estudian las propiedades de los neutrinos dentro del marco del Modelo Estándar Electrodébil (MEE) y los distintos mecanismos que permiten incorporar su masa. En particular, se revisa detalladamente el Modelo de Triplete de Higgs (MTH) que induce un mecanismo See-Saw tipo II, en el cual se incorpora un bosón escalar doblemente cargado en el espectro de partículas. Bajo las condiciones físicas del gran colisionador hadrónico LHC en el CERN, se explora la posibilidad de producir y detectar bosones de Higgs doblemente cargados en procesos tipo Drell-Yan en colisiones protón -protón. Teniendo en cuenta ruido de fondo de procesos electrodébiles, se encuentran señales de Higgs doblemente cargados por encima del ruido para masas de Higgs de 200, 300 y 800 GeV, para una parametrización de matrices de masa de neutrinos en jerarquía normal e inversa.

Palabras Clave: Masa de neutrinos, Mecanismo See-saw tipo II, Bosones de Higgs cargados.

Abstract

We study the neutrinos properties within Electroweak Standar Model frame (ESM) an the different mechanisms that allow them incorporates their mass. Particularly, we review in detail the Higgs Triplet Model it induces a type II See Saw Mechanism in which is incorporated a doubly charged scalar boson in the doubly charged particles spectrum. Under the Large Hadron Collider (LHC) physics conditions in CERN, we explore the possibility to produce and to detect doubly charged Higgs Boson in type Drell-Yan process in proton-proton collisions. Taking into account background of electroweak process, we have found doubly charged Higss signatures above the noise for Higgs masses into account 200, 300 y 800 GeV, for a matrices parametrization of neutrinos mass in normal and reverse hierarchy.

Keywords: Neutrinos Mass, See Saw type II Mechanism, Higgs Boson charged.

Contenido

1. Introducción	2
2. El neutrino en el Modelo Estándar Minimal	5
2.1. Generadores del grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$	6
2.1.1. Subgrupo $U(1)_Q$	7
2.2. El sector fermiónico	8
2.2.1. Base de Representaciones Fermiónicas	8
2.2.2. Representaciones para los quarks y leptones	9
2.3. El sector escalar	12
2.3.1. Rompimiento Espontáneo de la Simetria (R.E.S)	13
2.3.2. Condiciones para masas de fermiones	15
2.3.3. Base de representaciones escalares	16
2.4. El sector vectorial	20
2.4.1. La derivada covariante	20
2.4.2. Base de representaciones vectoriales	20
2.5. Espectro del MTH	22
3. Mecanismo See-saw tipo II	24
3.1. El triplete de Higgs	24
3.2. El lagrangiano de Higgs	25
3.2.1. El potencial de Higgs	25
3.2.2. Diagonalización: sector cargado	28
3.2.3. Sector neutro	29
3.2.4. Diagonalización: sector imaginario	30
3.2.5. Diagonalización: sector real	31
3.3. El Sector cinético de Higgs	31
3.3.1. El Doblete	32
3.3.2. El Triplete simétrico	33

3.4. El lagrangiano de Yukawa	37
3.4.1. El lagrangiano con leptones	37
3.4.2. Diagonalización: Generación de masa de neutrinos y el mecanismo See-saw	39
4. El triplete escalar en el LHC	42
4.1. Introducción a la Física de Colisionadores	43
4.1.1. Definiciones y Fundamentos.	44
4.1.2. Búsqueda para la Nueva Física	45
4.2. El experimento del LHC	47
4.2.1. La composición del protón: Las funciones de estructura partónica	47
4.2.2. Colisiones p-p: Los cortes cinemáticos, el problema del background	48
4.3. Producción y decaimiento de bosones de Higgs doblemente cargados	49
4.3.1. Canales de producción a dos leptones: Los anchos de decaimiento	50
4.4. Reconstrucción de señales en el LHC: Simulación de señales y background	51
5. Sumario y Conclusiones	57
A. Grupos y Teoría de la Representación	60
A.1. Generalidades	60
A.2. Representación	63
A.3. El grupo $SU(n)$	64
A.3.1. Representación n	65
A.3.2. Representación n^* (conjugada)	65
A.3.3. Representación $n \otimes n$	66
A.3.4. Representación $n^* \otimes n^*$	66
A.3.5. Representación $n \otimes n^*$	67
A.3.6. Representaciones irreducibles $n \otimes n$ y $n \otimes n^*$	67
A.3.7. Representación irreducible $n \otimes n^*$ la representación ad- junta	68
A.4. Grupo $SU(n)$ en teoría cuántica de campos	69
A.5. La derivada covariante	71
A.5.1. Representación n	72

A.5.2. Representación n^*	73
A.5.3. Representación $n \otimes n$	73
A.5.4. Representación $n^* \otimes n^*$	73
A.5.5. Representación $n \otimes n^*$	74
A.6. Lagrangianos fermiónicos	74
B. Sector de Higgs	76
B.1. Valores esperados en el vacío y campos	76
B.1.1. Doblete	76
B.1.2. Triplete simétrico	78
C. Matrices de masa	80
C.1. Sector cargado	80
C.2. Sector neutro	81
C.3. Sector real	82
D. Reglas de Feynman	84
E. Parámetros utilizados en los cálculos numéricos	87
F. Cinemática	89

Lista de Figuras

4.1.	Recientes y futuras fronteras de energía de los colisionadores de energía (Parámetros listados para el LHC y el ILC .) [39]	45
4.2.	Esquema de colisión p-p	49
4.3.	Cortes cinemáticos para el ángulo de dispersión para partículas del MEE y bosones de Higgs doblemente cargados	50
4.4.	Secciones eficaces para la producción de $H^{\pm\pm}$ y H^{\pm}	51
4.5.	Distribución de masa invariante $M_{\ell^{\pm}\ell^{\pm}} = 200$ Gev en NH para la señal dileptonica y background	53
4.6.	Distribución de masa invariante $M_{\ell^{\pm}\ell^{\pm}} = 200$ Gev en IH para la señal dileptonica y background	54
4.7.	Distribución de masa invariante $M_{\ell^{\pm}\ell^{\pm}} = 300$ Gev en NH para la señal dileptonica y background	54
4.8.	Distribución de masa invariante $M_{\ell^{\pm}\ell^{\pm}} = 300$ Gev IH para la señal dileptonica y background	55
4.9.	Distribución de masa invariante $M_{\ell^{\pm}\ell^{\pm}} = 800$ Gev en NH para la señal dileptonica y background	55
4.10.	Distribución de masa invariante $M_{\ell^{\pm}\ell^{\pm}} = 800$ Gev IH para la señal dileptonica y background	56
A.1.	Representación Grupo	64
D.1.	Diagramas de Feynman Delta-Delta-Vector-Vector	84
D.2.	Diagramas de Feynman Delta-Delta-Vector	85
D.3.	Diagramas de Feynman Delta-Vector-Vector	86
F.1.	Representación de un estado inicial en la dispersión partón-partón empezado de una colisión p-p en el centro de masa.	90

Lista de Tablas

3.1. Espectro escalar cargado físico	29
3.2. Bosones neutros	30
3.3. Espectro real físico	31
3.4. Bosones electrodébiles	35

Capítulo 1

Introducción

La historia de los neutrinos se remonta a 1892, cuando Becquerel descubrió la radiactividad del uranio. En 1914, Chadwick hace un crucial descubrimiento demostrando que el espectro beta es continuo, lo que violaría el principio de conservación de la energía [1]. Dicho descubrimiento fue confirmado posteriormente en 1927 por Ellis y Wooster. Meitner experimentalmente, demostró que la falta de energía no podía atribuirse a los rayos gama neutros. Para poner remedio a este grave problema, W. Pauli postula, en una carta abierta a una conferencia de física en Tübingen el 4 de diciembre de 1929, la existencia de una partícula neutra para salvaguardar el principio de conservación de la energía en el decaimiento beta [2], y la cuál Fermi la acuñó con el nombre de neutrino. En 1934 Fermi formula una teoría que describe el proceso del decaimiento beta [3], la cual lo describe como un proceso de interacción puntual entre 4 partículas, de tal forma que el neutrón decae en un protón, electrón y antineutrino electrónico. Los resultados exitosos de esta teoría le abrieron camino a la idea de la existencia del neutrino. Sin embargo era preciso encontrarlo experimentalmente.

En 1956, F. Reins y C. Cowan mostraron la existencia del neutrino por medio de la reacción de un material rico en protones [4], en la cuál se producían neutrones y positrones debida a la emisión de neutrinos electrónicos provenientes de un reactor nuclear. Con el avance tecnológico de los años venideros fue posible construir aceleradores de partículas y otros experimentos para determinar la existencia de tres variedades de neutrinos, neutrino electrónico (ν_e), muónico (ν_μ) y tauónico (ν_τ), cada neutrino asociado a una familia de leptones cargados.

Ahora se conoce con certeza que los neutrinos interactúan muy débilmente a través de la interacción débil, una de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza y que está enmarcada dentro del Modelo Estándar Minimal (MEM) de partículas elementales. El MEM cimentado por Glashow, Salam y Weinberg [5], describe también la interacción fuerte y electromagnética, cada interacción asociada a un grupo de simetría soportada en la Teoría Cuántica de Campos. Aunque el MEM ha sido exitoso en la predicción de muchos parámetros experimentales, contiene un conjunto de aspectos, principalmente teóricos a los que no responde de manera satisfactoria, haciéndolo un modelo aproximado. Uno de los problemas más interesantes del MEM es la predicción de neutrinos sin masa, pero esto contradice claramente la evidencia experimental. Investigaciones en la conversión de sabor de neutrinos solares, atmosféricos, y de reactores y aceleradores [6] han establecido indiscutiblemente que los neutrinos tienen masa pequeña pero distinta de cero y que ellos se mezclan entre sí, proporcionando la primera evidencia experimental de nueva física más allá del MEM. Este descubrimiento ha disparado enormemente la actividad teórica intentando descubrir la naturaleza de esta nueva física. Estos intentos incluyen modelos más allá del MEM; como modelos en que se extiende la estructura de simetría del Modelo Estándar Electrodébil (MEE) a grupos más grandes, por ejemplo en el caso de modelos de unificación y modelos con la misma estructura de grupo del MEE, que extienden su contenido de partículas en su sector fermiónico, ó escalar, ó ambas al mismo tiempo.

Una alternativa interesante para introducir la masa de los neutrinos son los llamados mecanismos See-saw, en la cuál se podría explicar de forma natural el pequeño valor de las masas de los neutrinos, se implementan de manera natural en modelos de unificación, y permiten hacer conexiones cosmológicas y la física a bajas y altas energías. Estos mecanismos se presentan básicamente en tres formas diferenciadas [7]: Tipo I, Tipo II y Tipo III. Cada forma incluye extensiones del MEM con una nueva escala de energías más allá de la electrodébil y que dan cuenta de la masa del neutrino. En su forma básica, estas extensiones incluyen la adición de un campo pesado de neutrinos derechos bajo el grupo gauge del MEM (Tipo I), la introducción de un triplete de Higgs que extiende el sector de Higgs en el MEM (Tipo II) o la suma de un triplete leptónico izquierdo con hipercarga cero (Tipo III).

Durante los últimos años, se han implementado diferentes posibilidades en el mecanismo See-saw Tipo II, en la cuál se encuentra una nueva escala de

energía que puede llegar al orden de los TeV, escala que podrá ser explorada a nivel del Gran Colisionador Hadrónico LHC en el CERN [7]. Una característica del See-saw Tipo II es la introducción de nuevos bosones de Higgs doblemente cargados cuya masa ($M_{H^{\pm\pm}}$) puede estar entre la escala electrodébil y la de los TeV. Los nuevos bosones, en principio, se pueden producir con tasas importantes de producción en los colisionadores de hadrones y decaer leptónicamente creando una señal distintiva que puede ser detectada en el LHC. Esta posibilidad abre a su vez un camino para identificar cual es el mecanismo apropiado para la generación de masa del neutrino y entender problemas como el dominio de la materia sobre la antimateria (la asimetría bariónica del universo), la naturaleza de materia oscura, la energía oscura, entre otros.

El objetivo del presente trabajo es hacer una reconstrucción general del modelo See-saw Tipo II a partir de criterios de simetría, haciendo un estudio fenomenológico y tomando como referencia la escala electrodébil. En el capítulo II se desarrolla el formalismo para el modelo See-saw Tipo II construyendo sus diferentes representaciones para obtener el espectro del Modelo Estándar Electrodébil con el triplete de Higgs en estados de sabor. En el capítulo III se plantea el esenario físico del modelo con espectros en estados de masa e interacciones. El capítulo IV se enfoca en las simulaciones para una de las componentes del triplete escalar en procesos tipo Drell-Yan en colisiones protón-protón y ruido de fondo (background) de procesos electrodébiles para el LHC, finalmente se resumen algunas conclusiones en el capítulo V.

Capítulo 2

El neutrino en el Modelo Estándar Minimal

El Modelo Estándar Minimal (MEM) construido por Glashow, Salam y Weinberg, describe las interacciones fundamentales débiles, fuertes y electromagnéticas, asociándolas a ciertos grupos de simetrías y soportándose en la Teoría Cuántica de Campos [5]. El modelo presenta unificación electrodébil a través del grupo de gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, e incorpora la fuerza fuerte basándose en el grupo de gauge $SU(3)_c$. La simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ se asocia con la interacción electrodébil entre fermiones y es mediada por los cuatro bosones electrodébiles: W_μ^\pm , Z_μ , A_μ . La simetría $SU(3)_c$ está asociada a la interacción fuerte entre los quarks, la cual es mediada por ocho gluones. El Modelo Estándar Electrodébil (MEE), que corresponde al sector $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, describe el espectro físico de partículas una vez se ha implementado la Ruptura Espontanea de la Simetría (R.E.S) $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_Q$ [8], donde a $U(1)_Q$ se le asocia la interacción electromagnética, mediada por los fotones carentes de masa. En esta descripción se hace necesaria la presencia de un doblete con cuatro campos escalares, los cuales permitirán la adquisición de masas de los fermiones y bosones de gauge, teniendo una teoría de gauge con masa y renormalizable [9, 10, 11]. Después de la ruptura espontanea de la simetría, tres de los campos del doblete aparecen como partículas no físicas (bosones de Goldstone), mientras que el otro adquiere masa (con valor no determinado por el modelo), apareciendo en el espectro como una partícula física conocida como bosón de Higgs.

Aunque el MEM ha logrado predecir con gran exactitud una buena can-

tividad de parámetros experimentales [12], y presenta una gran consistencia matemática, contiene una serie de aspectos que no responde de manera satisfactoria, haciéndolo un modelo aún por completar, lo que significa que debe tomarse como una teoría efectiva a, relativamente, bajas energías ($\ll 1$ TeV), y que se origina de teorías aun más generales y fundamentales. Entre las características no explicadas por el MEM, se menciona el problema de la existencia de 3 familias (el problema de la replicación de las familias) [13, 14], el gran rango no natural de valores diferentes de masas (el problema de las jerarquías de masas) [13, 14], la relación entre las cargas de leptones y quarks con la carga del electrón (el problema de la cuantización de la carga) [12, 13], la cantidad de parámetros libres para ajustar en el modelo (el problema de la arbitrariedad de parámetros) [13, 14], la no predicción del tiempo de decaimiento del protón (el problema de la estabilidad del protón) [13], la no presencia de la interacción de la gravedad en el modelo (el problema de la cuantización de la gravedad) [15], el problema de la masa de los neutrinos y la oscilación de neutrinos [16], entre otros.

Se procede a la construcción de un modelo quiral que presente simetría bajo el grupo local $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. El sector de color $SU(3)_c$ es el mismo (los neutrinos no presentan interacción fuerte), por lo que la construcción hace énfasis sobre $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ extendiendo con un triplete simétrico el sector escalar.

2.1. Generadores del grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$

El Modelo Estándar Minimal (MEM) se basa en un grupo quiral izquierdo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. A partir de la definición (A.6), se tiene que los generadores \hat{T} de un grupo especial unitario $SU(2)_L$ en la representación fundamental, correspondientes a $n^2 - 1 = 3$ matrices con traza nula, y de las cuales hay $n - 1 = 1$ matrices diagonales conmutantes están dados por:

$$T_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad T_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

las cuales están normalizadas tal que $\text{Tr}(T_\alpha T_\beta) = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta}$ y cumplen con el álgebra de Lie y reglas de conmutación que se muestran a continuación:

$$[T_\alpha, T_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}T_\gamma, \quad (2.2)$$

$$\{T_\alpha, T_\beta\} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}, \quad (2.3)$$

donde el coeficiente $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ es el tensor de Levi-Civita. El grupo unitario $U(1)_Y$ tiene un generador \hat{T}_0 , cuya representación fundamental T_0 debe ser una matriz escogida bajo las siguientes condiciones para formar el producto directo con $SU(2)_L$

i) Debe ser 2×2 diagonal en consecuencia con la matrices de Pauli en representación **2**

$$T_0 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

ii) Se exige la misma normalización que las matrices de Pauli

$$\text{Tr}T_0^2 = \frac{1}{2}, \quad (2.5)$$

iii) Debe conmutar con T_1 , T_2 y T_3 :

$$[T_0, T_\alpha] = 0, \quad (2.6)$$

Combinando las condiciones anteriores se deduce que:

$$T_0 = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Se debe asegurar que el modelo incorpore la conservación de la carga eléctrica, lo cuál se implementa al exigir que el sector electrodébil $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ contenga al subgrupo $U(1)_Q$ con el generador de la carga eléctrica Q .

2.1.1. Subgrupo $U(1)_Q$

El grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ admite subgrupos $U(1)$. Se puede definir un subgrupo unitario $U(1)$ cuyo generador sea una combinación lineal de los generadores diagonales $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ [13, 17, 18],

$$\hat{Q} = \alpha \hat{T}_3 + \beta \hat{T}_0. \quad (2.8)$$

Este generador se conoce como carga eléctrica, y los coeficientes de la ecuación anterior se escogen tal que coincidan con los valores de la carga en unidades de la carga del electrón, según los fermiones ψ que se asignen al modelo. En particular, se escoge la combinación lineal tal que cumpla con la relación de Gell-Mann y Nishijima [13, 17, 18, 19]:

$$Q = T_3 + Y, \quad (2.9)$$

con T_3 la tercera matriz de (2.1) conocida como el isospín, con α igual a 1, y $Y = \beta T_0$ como la hipercarga.

2.2. El sector fermiónico

En teoría cuántica de campos la representación se indica como relaciones de conmutación entre los generadores abstractos \hat{T}_α del grupo y el operador de campo $\hat{\psi}$. Se muestran las diferentes representaciones para la parte fermiónica.

2.2.1. Base de Representaciones Fermiónicas

Como el MEM es una teoría quiral el operador campo se escribe como la superposición de componente quiral izquierda ($\hat{\psi}_L$) y componente quiral derecha ($\hat{\psi}_R$). Siguiendo lo anotado en los apéndices A.3 y A.4, se escoge la base para las representaciones fundamentales y conjugadas aplicada a operadores fermionicos $\hat{\psi}_L$ y $\hat{\psi}_R$:

Representacion n= 2

Aplicando la relación (A.27), el campo $\hat{\psi}_L$ transforma según la representación **2** y $\hat{\psi}_R$ transfoma según **1**, es decir:

$$[\hat{T}_\alpha^{SU(2)}, \hat{\psi}_L] = -(T_\alpha)_j^i \psi_L^j, \quad (2.10)$$

$$[\hat{T}_\alpha^{SU(2)}, \hat{\psi}_R] = 0. \quad (2.11)$$

con $\alpha = 1, 2, 3$.

Representacion $\mathbf{n^*=2^*}$

De la relación (A.28), se tiene que $\hat{\psi}_L$ transforma según la representación $\mathbf{2^*}$ y $\hat{\psi}_R$ transforma según $\mathbf{1}$, lo que es equivalente a:

$$[\hat{T}_\alpha^{SU(2)}, \hat{\psi}_L] = -[(T_\alpha)_i^j] \psi_{jL}, \quad (2.12)$$

$$[\hat{T}_\alpha^{SU(2)}, \hat{\psi}_R] = 0. \quad (2.13)$$

2.2.2. Representaciones para los quarks y leptones

La fenomenología de partículas elementales ha permitido identificar que la materia está fundamentalmente compuesta por partículas de espín 1/2 fermiones ($\hat{\psi}$), las cuales se clasifican en dos clases: los quarks (\hat{q}) que presentan interacción fuerte y los leptones ($\hat{\ell}$) que no interactúan fuertemente. Es así que los quarks se asocian a toda fenomenología subatómica donde se involucran procesos hadrónicos asociados a fuerzas fuertes. Los leptones no intervienen en este tipo de procesos, pero sí presentan otro tipo de interacción subatómica como lo es la interacción débil, en la cual también intervienen los quarks. El modelo a construir clasifica a dichas partículas en el grupo de gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, cuyas representaciones fundamentales se estudian en general en el apéndice A.

Representaciones $SU(2)_L$

La representación fundamental de este grupo con generadores dados en (2.1), introducen un carácter quirral al clasificar solamente las componentes fermiónicas con helicidad izquierda en dobletes. Por lo tanto la Ec. (2.10), se escribe para una familia como:

$$\begin{aligned} \hat{\ell}_{SU(2)_L} &= \begin{pmatrix} \hat{\ell}^1 \\ \hat{\ell}^2 \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L : \mathbf{2}, \\ \hat{q}_{SU(2)_L} &= \begin{pmatrix} \hat{q}^1 \\ \hat{q}^2 \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L : \mathbf{2}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

con ν , e , u y d el neutrino, electrón, quark up y quark down respectivamente. Dicha clasificación se repite dos veces más para otras parejas de partículas

(tres familias). La idea de introducir un grupo izquierdo es para incluir el hecho de que la interacción débil se presenta diferenciada entre las componentes izquierdas y derechas. Esto significa que los campos derechos transforman como singletes bajo el grupo $SU(2)_L$ como se observa en las Ec. (2.11) y (2.13), se tiene entonces:

$$\begin{aligned} [\widehat{T}_\alpha, \widehat{\ell}_R] &= 0, \\ \widehat{\ell}_{RSU(2)_L} &: \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} [\widehat{T}_\alpha^L, \widehat{q}_R] &= 0, \\ \widehat{q}_{RSU(2)_L} &: \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Representacion $U(1)_Q$

Se le asigna a cada fermión un valor al número cuántico Q asociado al subgrupo $U(1)_Q$, tomando la definición (2.8) se tiene:

$$[\widehat{Q}, \widehat{\psi}] = [\widehat{T}_3, \widehat{\psi}] + [\widehat{Y}, \widehat{\psi}], \quad (2.17)$$

donde cada conmutador depende de la representación en la que se encuentre la base $\widehat{\psi}$. Para los fermiones izquierdos ya se halló la representación fundamental $\mathbf{2}$, que explícitamente para los quarks y leptones, toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} [\widehat{Q}, \widehat{q}_L^i] &= - (Q_q^L)^i \widehat{q}_L^i, \\ [\widehat{Q}, \widehat{\ell}_L^i] &= - (Q_\ell^L)^i \widehat{\ell}_L^i, \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde a partir de la definición (2.9) se tiene:

$$\begin{aligned} Q_q^L &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + Y_q^L & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + Y_q^L \end{bmatrix}, \\ Q_\ell^L &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + Y_\ell^L & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + Y_\ell^L \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

En la representación conjugada $\mathbf{2}^*$ se tienen las mismas matrices pero con valores de signo contrario, esto es:

$$\begin{aligned}\left[\widehat{Q}, \widehat{q}_L^i\right] &= -\left(-Q_q^L\right)_i^i \widehat{q}_L^i, \\ \left[\widehat{Q}, \widehat{\ell}_L^i\right] &= -\left(-Q_\ell^L\right)_i^i \widehat{\ell}_L^i,\end{aligned}\tag{2.20}$$

Para el sector derecho, por ser este singlete, se cumple de la Ec. (A.32) que $\left[\widehat{T}_3^L, \widehat{\psi}_R\right] = 0$, por lo que la Ec. (2.17) conduce directamente a:

$$\begin{aligned}\left[\widehat{Q}, \widehat{q}_R\right] &= -\left(Q_q^L\right) \widehat{q}_R, \\ \left[\widehat{Q}, \widehat{\ell}_R\right] &= -\left(Q_\ell^L\right) \widehat{\ell}_R,\end{aligned}\tag{2.21}$$

con:

$$\begin{aligned}Q_q^R &= Y_q^R, \\ Q_\ell^R &= Y_\ell^R.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Representacion $U(1)_Y$

Se define la hipercarga de una representación $\widehat{\psi}$ como :

$$\left[\widehat{Y}, \widehat{\psi}\right] = -\left(Y \delta_j^i\right) \psi^j,\tag{2.23}$$

de esta manera la hipercarga se asigna a los fermiones izquierdos según:

$$\begin{aligned}\left[\widehat{Y}, \widehat{q}_L^i\right] &= -\left(Y_q^L\right)_i^i \widehat{q}_L^i, \\ \left[\widehat{Y}, \widehat{\ell}_L^i\right] &= -\left(Y_\ell^L\right)_i^i \widehat{\ell}_L^i,\end{aligned}\tag{2.24}$$

de la definición (2.9) se encuentra que:

$$Y_q^L = \begin{bmatrix} Q_q^L - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & Q_q^L + \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$Y_\ell^L = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - Q_\ell^L & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + Q_\ell^L \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

para la representación conjugada se tiene:

$$\begin{aligned} [\hat{Y}, \hat{q}_L^i] &= -(-Y_q^L)^i \hat{q}_L^i, \\ [\hat{Y}, \hat{\ell}_L^i] &= -(-Y_\ell^L)^i \hat{\ell}_L^i. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Para las componentes derechas se cumple lo mismo que en el caso de la carga en (2.21), por lo que la hipercarga es:

$$\begin{aligned} [\hat{Y}, \hat{q}_R] &= -(Y_q^R) \hat{q}_R, \\ [\hat{Y}, \hat{\ell}_R] &= -(Y_\ell^R) \hat{\ell}_R, \end{aligned} \quad (2.27)$$

con:

$$\begin{aligned} Y_q^R &= Q_q^R, \\ Y_\ell^R &= Q_\ell^R. \end{aligned} \quad (2.28)$$

2.3. El sector escalar

Puesto que el modelo debe contener al MEM, se debe respetar el Rompimiento Espontaneo de la Simetría (R.E.S) según el esquema $321 \rightarrow 31$, lo que quiere decir que se debe implementar un sector escalar adecuado que permita el correcto rompimiento de los generadores primero al MEM y luego a la QED. Además, en las extensiones mas allá del MEM se debe asegurar que el sector escalar genere masas pesadas a las partículas extras asociadas a nueva física y masas mas livianas a la escala electrodébil del espectro fenomenológico observado a bajas energías y descrito por el MEM.

2.3.1. Rompimiento Espontáneo de la Simetría (R.E.S)

Dentro de cualquier modelo que describa interacciones entre partículas (sea un modelo clásico o cuántico), surge siempre el problema de la autointeracción, esto es, la interacción del campo producido por una partícula sobre sí misma. Al tratar de resolver dicha situación, las ecuaciones llevan a resultados divergentes, donde la intensidad de la interacción se hace infinita. Sin embargo, esos infinitos pueden ser eliminados o anulados con la introducción de otros infinitos implementados de forma sistemática a través del mecanismo de renormalización [20, 21, 22]. De esta manera se convierte en condición básica que cualquier modelo de partículas elementales que describa interacciones, debe poderse renormalizar. Aun más, esta exigencia de renormalización debe mantenerse a todos los órdenes de corrección si se aplica teoría de perturbaciones en el modelo. Otra condición para mantener la renormalización, es evitar la introducción directa de términos de masa en el lagrangiano (términos de la forma $m\bar{\psi}\psi$ para fermiones y $\frac{1}{2}m^2T_\mu T^\mu$ para bosones), los cuales además dañan la invarianza de gauge de la teoría [9, 10, 11]. Sin embargo hay una forma indirecta de introducir ese tipo de términos, los cuales son necesarios en el modelo, pues es evidente que la mayoría de partículas son masivas. El procedimiento es un mecanismo que rompe la simetría del vacío (no del lagrangiano) preservando aun los efectos de la invarianza, y que se implementa de tal forma que la renormalización se mantenga. El método es el mecanismo de Higgs, el cual consiste en introducir un campo escalar Φ que interactúa con los bosones de gauge y fermiones, cuyo estado de mínima energía (estado de vacío) pueda presentar dos casos de simetría: antes del R.E.S, donde el vacío tiene la misma invarianza de gauge que el lagrangiano y todas las partículas aparecen sin masa; y después del R.E.S, donde el vacío se degenera, y los fermiones y algunos bosones de gauge adquieren valores de masas que se ajustan de acuerdo a los datos experimentales [9, 10, 11, 13, 20]. De esta manera surge una relación entre la adquisición de masa de una partícula y el rompimiento espontaneo de alguna simetría. Este procedimiento, inicialmente matemático, se ha tratado de entender en una visión de un universo que evoluciona por etapas, las cuales son separadas por transiciones correspondientes a algún rompimiento de simetría y con la consecuente adquisición de masa de algunas partículas. Actualmente las únicas partículas sin masa que se conocen son los gluones y el fotón, por lo que la única simetría que se mantiene exacta es $SU(3)_c \otimes U(1)_Q$ (simetría 31). El MEM describe una etapa anterior del universo, donde aún existía la

simetría electrodébil $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ (simetría 321), el cual en alguna escala de energía se rompió espontáneamente a una simetría $U(1)_Q$. Formalmente el rompimiento sucede sobre el estado de vacío del campo Φ , el cual corresponde al Valor Esperado en el Vacío del campo (V.E.V). Si el vacío es simétrico, este es un escalar bajo los cuatro generadores del grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ que según la Ec. (A.32) significa:

$$\begin{aligned} [\hat{T}_\alpha^{SU(2)}, \langle \Phi \rangle_0] &= 0, \\ [\hat{Y}, \langle \Phi \rangle_0] &= 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

En el rompimiento de $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{\Phi} U(1)_Q$ el vacío es invariante bajo el generador carga $\hat{Q} = \hat{T}_3 + \hat{Y}$, pero deja de ser invariante bajo los tres generadores : \hat{T}_1 , \hat{T}_2 y una combinación ortogonal $\hat{Q}^\perp = \hat{T}_3 - \hat{Y}$ [13]. Esto se expresa como:

$$\begin{aligned} [\hat{T}_{1,2}^{SU(2)}, \langle \Phi \rangle_0] &\neq 0, \\ [\hat{T}_3^{SU(2)} - \hat{Y}, \langle \Phi \rangle_0] &\neq 0, \\ [\hat{Q}, \langle \Phi \rangle_0] &= 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Por cada generador roto, hay un bosón de gauge que adquiere masa, pero esto significa un grado de libertad adicional (bosones con componentes longitudinales), por lo que el efecto de la ecuación anterior sobre los campos Φ es la “absorción” de ciertos grados de libertad conocidos como bosones de Goldstone. Los bosones que no se absorban en Φ quedan en el espectro físico como partículas masivas conocidas como bosones de Higgs. De esta manera el mecanismo básicamente consiste en introducir inicialmente suficientes componentes escalares (grados de libertad) Φ , de tal forma que el número de generadores rotos corresponden al número de bosones de gauge que adquieren masa, y este a su vez, al número de bosones de Goldstone [13, 23]. En el caso de la ecuación anterior, hay tres generadores rotos, lo cual significa que hay tres bosones de Goldstone que desaparecen del espectro físico y tres bosones de gauge (los débiles) que adquieren masa. Pero aún hay un generador no roto, por lo que queda un bosón de gauge sin masa (el fotón).

2.3.2. Condiciones para masas de fermiones

El mecanismo de Higgs no implementa directamente las masas de los fermiones, como si lo hace con los bosones vectoriales. Para darle masa a los fermiones, se introducen términos de interacción entre fermiones y campos escalares, de tal manera que estos sean hermíticos, renormalizables y tengan simetría 321. Ese tipo de términos son conocidos como términos de Yukawa, los cuales toman la forma genérica [23]:

$$\bar{\psi}\psi\Phi + \bar{\psi}(\psi)^c\Phi + \overline{(\psi)^c}\psi\Phi^\dagger + \overline{(\psi)^c}(\psi)^c\Phi^\dagger, \quad (2.31)$$

donde c es la operación conjugación de la carga. Para una teoría quiral, se expresan los fermiones en componentes de helicidad R y L , obteniendo el término de Yukawa de la forma:

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}_L\psi_R\Phi + \bar{\psi}_R(\psi_L)^c\Phi + \overline{(\psi_L)^c}\psi_R\Phi^\dagger + \overline{(\psi_L)^c}(\psi_L)^c\Phi^\dagger + \\ & \bar{\psi}_R(\psi_R)^c\Phi + \overline{(\psi_R)^c}(\psi_R)^c\Phi^\dagger + \overline{(\psi_L)^c}(\psi_R)^c\Phi^\dagger + \overline{(\psi_R)^c}(\psi_L)^c\Phi \\ & = \bar{\psi}_L\psi_R\Phi + \bar{\psi}_L(\psi_L)^c\Phi + \bar{\psi}_R(\psi_R)^c\Phi + \overline{(\psi_R)^c}(\psi_L)^c\Phi + h.c., \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde $h.c$ son los respectivos hermíticos conjugados. Entonces se tienen las diferentes representaciones de los fermiones en el sector $SU(2)_L$:

$$\widehat{\psi}_L^i : \mathbf{2}; \quad \widehat{\psi}_{iL} : \mathbf{2}^*; \quad \widehat{\psi}_R : \mathbf{1}, \quad (2.33)$$

como los términos de Yukawa deben ser invariantes bajo $SU(2)_L$, estos deben formar singletes. Con esta condición y de acuerdo a la Ec. (2.33), los terminos la Ec. (2.32) tienen la siguiente forma de transformación (recordando que el complejo conjugado baja índices según notación de la sección A.3.2):

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_L^i\psi_R\Phi & : \quad \mathbf{2}^* \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{n} = \mathbf{2}, \\ \overline{\psi}_L^i(\psi_L^j)^c\Phi & : \quad \mathbf{2}^* \otimes \mathbf{2}^* \otimes \mathbf{n} = \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{n} = \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}, \\ \bar{\psi}_R(\psi_R)^c\Phi & : \quad \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{n} = \mathbf{1}, \\ \overline{(\psi_L^i)^c}(\psi_R)^c\Phi & : \quad \mathbf{2} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{n} = \mathbf{2}^*. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Para que los anteriores productos transformen como singletes, son necesarias las formas respectivas para \mathbf{n} .

Esto significa que los campos escalares Φ pueden tener representación $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$ (simétrica o antisimétrica), $\mathbf{2}$ (doblete), $\mathbf{2}^*$ (antidoblete) o $\mathbf{1}$ (singlete) para asegurar la invarianza $SU(2)_L$; en cuanto al grupo $U(1)_Y$, los términos de Yukawa también deben ser invariantes, es decir:

$$[\hat{Y}, \text{Término Yukawa}] = 0.$$

Cualquiera de las representaciones que se escoja, debe asegurar las siguientes condiciones:

- i)* El número de componentes de Φ se debe ajustar por lo menos al número de bosones de Goldstone para cada transición de R.E.S.
- ii)* El V.E.V $\langle \Phi \rangle_0$ debe cumplir con las condiciones (2.29) y (2.30) en cada transición (en este caso una sola de transición).
- iii)* El V.E.V, al ser reemplazado en los terminos (2.32), debe llevar a que el número correcto de fermiones adquiera masa de acuerdo a cada transición. Esta condición no es directa, pues van a surgir matrices de mezcla que deben ser diagonalizadas para obtener las masas físicas, y de aquí el verdadero espectro de fermiones de la teoría. Por lo tanto no se usará esta condición para la construcción del sector escalar, sino mas bien, servirá para evaluar al final el buen comportamiento del modelo.

2.3.3. Base de representaciones escalares

Ya se tienen diferentes opciones de base para el campo Φ de acuerdo a los términos de Yukawa bajo las representaciones fermiónicas de las relaciones (2.34). Se evalúan las principales características de tales representaciones. La representación $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$ se divide en una representación simétrica y antisimétrica de acuerdo a la Ec. (A.20), lo que se expresa como:

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{1}. \quad (2.35)$$

Representación doblete $\mathbf{2}$

El primer término de la Ec.(2.32) permite una representanci3n doblete según la Ec. (2.34), que se clasifica en una matriz con componenetes complejas de la siguiente forma:

$$\Phi_1 = \phi = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

el doblete va tener cuatro componentes (campos escalares), dos asociadas a ϕ^1 y dos a ϕ^2 , para obtener 3 generadores rotos y 1 no roto (aparecen 3 bosones gauge con masa y 1 Higgs). Se le asigna un V.E.V con valores reales de la siguiente forma:

$$\langle \phi \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Al evaluar las condiciones (2.29) y (2.30) se obtiene la siguiente solución para V.E.V de ϕ y sus respectivos campos, encontrada en el apéndice B Ec. (B.7) y (B.10):

$$\langle \phi \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\phi^0 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Representación antidoblete 2^*

El cuarto término de las relaciones (2.32) permite una representación antidoblete según (2.34), de tal forma que:

$$\tilde{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

se obtiene la siguiente solución encontrada en la Ec. (B.11):

$$\tilde{\phi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\tilde{\phi} = i\tau_2 \phi^*. \quad (2.42)$$

con ϕ el doblete dado por la Ec. (2.39).

Representación triplete simétrico 3

El segundo término de la expresión (2.32) permite una representación triplete simétrico según las Ec. (2.34) y (2.35), de tal forma que:

$$\Phi_2 = \Delta = \begin{pmatrix} \Delta^{11} & \Delta^{12} \\ \Delta^{21} & \Delta^{22} \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

donde cada componente en general es compleja. El V.E.V del triplete simétrico es:

$$\langle \Delta \rangle_0 = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

los valores de las componentes tanto de V.E.V y del campo Δ son dadas por las Ec. (B.25) y (B.30) como sigue:

$$\langle \Delta \rangle_0 = \begin{pmatrix} \nu_\Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

y

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\Delta^0 & \Delta^- \\ \Delta^- & \sqrt{2}\Delta^{--} \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

La representación triplete simétrica también se conoce en la literatura como el triplete de Higgs o escalar [7], el cual expande el sector de Higgs e induce el mecanismo See-saw tipo II. El MEM incluido este triplete origina un nuevo modelo conocido como Modelo con Triplete de Higgs (MTH).

Representación singlete 1

Finalmente se tiene la posibilidad singlete en el tercer término en la Ec. (2.32). Sin embargo todos los conmutadores en (2.30) se anulan por la misma definición singlete en (A.32), imposibilitando que los generadores se rompan, y por lo tanto no es viable el mecanismo de Higgs. Así esta posibilidad se descarta junto con el tercer término en (2.32).

Representaciones $U(1)_Q$

El generador carga eléctrica actuando sobre las diferentes representaciones anteriores, lleva a los valores de carga en cada multiplete. Para el caso del doblete (2.39):

$$[\widehat{Q}, \phi] = [\widehat{T}_3, \phi] + [\widehat{Y}, \phi], \quad (2.47)$$

donde cada conmutador se halla de acuerdo a la forma (A.27), obteniendo:

$$Q_\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

para el antidoblete (2.41) se tiene:

$$Q_{\phi^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Para el triplete simétrico (2.46), se obtiene:

$$Q_\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

Representación $U(1)_Y$

De forma análoga se obtienen las hipercargas de cada representación escalar. Para ϕ :

$$Y_\phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

y para el antidoblete ϕ^* :

$$Y_{\phi^*} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Para el triplete simétrico se tiene:

$$Y_\Delta = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

2.4. El sector vectorial

Este sector describe la propagación de los campos Δ y ϕ además de la interacción entre los campos escalares y vectoriales a través de la derivada covariante.

2.4.1. La derivada covariante

Para que el modelo sea invariante local bajo el grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, es necesario redefinir el momento lineal introduciendo campos vectoriales asociados a los generadores del grupo, tal como se muestra en la sección A.5. Para el sector $SU(2)_L$, que tiene 3 generadores \hat{T}_α , se introducen 3 campos de gauge W_μ^α y una constante de acoplamiento g , para el sector $U(1)_Y$ se tiene solo un generador \hat{T} , por lo que sólo es necesario introducir un bosón gauge B_μ y una constante de acople g' , es de esta manera que se implementan en el modelo fermiones que se propagan en el espacio y que pueden interactuar a través de tres bosones intermediarios, de tal forma que se mantenga la invarianza de Lorentz y la invarianza local de $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Lo anterior se resume en la definición de derivada covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\vec{W}_\mu \cdot \vec{T} + ig'B_\mu Y. \quad (2.54)$$

2.4.2. Base de representaciones vectoriales

La derivada covariante permite definir una base para los 4 bosones gauge, cuya representación fundamental debe ser $n = 2$. Se observa en la expresión (2.54) que la parte del acople para el sector $SU(2)_L$ toma la forma $W_\mu^\alpha T_\alpha$. Al aplicar los generadores del grupo (2.1) sobre esta forma y sumando sobre $\alpha = 1, 2, 3$, se obtiene explícitamente lo siguiente:

$$\mathbf{W}_\mu = \vec{W}_\mu \cdot \vec{T} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

La base del bosón asociado a $U(1)_Y$

$$\mathbf{B}_\mu = Y B_\mu = Y \begin{pmatrix} B_\mu & 0 \\ 0 & B_\mu \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Representación $U(1)_Q$

Al igual como se obtuvo la carga de los fermiones en Ec. (2.18), se obtiene la carga para los bosones gauge:

$$[\widehat{Q}, \mathbf{W}_{j\mu}^i] = [\widehat{T}_3, \mathbf{W}_{j\mu}^i] + [\widehat{Y}, \mathbf{W}_{j\mu}^i],$$

Al aplicar (A.29), se obtiene el siguiente resultado:

$$[\widehat{Q}, \mathbf{W}_{j\mu}^i] = -[(T_3)_k^i \delta_j^l - \delta_k^i (T_3)_j^l] W_{l\mu}^k - [Y \delta_k^i \delta_k^i - \delta_k^i Y \delta_j^l] W_{j\mu}^i, \quad (2.57)$$

con:

$$Q_W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.58)$$

identificando así las cargas de cada componente de la matriz (2.55). Se observa que las diagonales son neutras, mientras que las componentes triangulares antisimétricas tienen en general cargas opuestas. Para la base (2.56), se tiene:

$$[\widehat{Q}, \mathbf{B}_{j\mu}^i] = -[(T_3)_k^i \delta_j^l - \delta_k^i (T_3)_j^l] W_{l\mu}^k - [Y \delta_k^i \delta_k^i - \delta_k^i Y \delta_j^l] W_{j\mu}^i, \quad (2.59)$$

como el generador \widehat{Y} se escogió para que conmutara con los generadores \widehat{T}_α de $SU(2)_L$, los conmutadores anteriores se anulan, resultando el bosón \mathbf{B}_μ neutro:

$$Q_B = 0. \quad (2.60)$$

Representación $U(1)_Y$

Para la hipercarga se tiene :

$$[\widehat{Y}, \mathbf{W}_{j\mu}^i] = 0, \quad (2.61)$$

entonces

$$Y_W = 0, \quad (2.62)$$

y de la misma forma para el bosón B_μ :

$$Y_B = 0. \quad (2.63)$$

2.5. Espectro del MTH

En las secciones 2.2, 2.3 y 2.4 se encuentran las bases para el espectro de partículas para el Modelo con Triplete de Higgs (MTH); Fermiones, bosones escalares y bosones gauge electrodébiles:

$$\begin{aligned}
 & \text{Fermiones} \left\{ \begin{aligned} \ell_L^{(n)} &= \begin{pmatrix} \nu^{(n)} \\ e^{(n)} \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} \nu_e & \nu_\mu & \nu_\tau \\ e & \mu & \tau \end{pmatrix}_L : (\mathbf{2}, -\frac{1}{2}) \\ e_R^{(n)} &= e_R, \mu_R, \tau_R : (\mathbf{1}, -1) \\ q_L^{(n)} &= \begin{pmatrix} u^{(n)} \\ d^{(n)} \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} u & c & t \\ d & s & b \end{pmatrix}_L : (\mathbf{2}, \frac{1}{6}) \\ q_R^{(n)} &= u_R, c_R, t_R, d_R, s_R, b_R : (\mathbf{1}, Y_q), \end{aligned} \right. \\
 & \text{Bosones escalares} \left\{ \begin{aligned} \text{Doblete} &\left\{ \phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(H + i\zeta) \end{pmatrix} : \left(\mathbf{2}, \frac{1}{2}\right); \quad \text{con} \langle \phi \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \right. \\ \text{Triplete} &\left\{ \Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\Delta^0 & \Delta^- \\ \Delta^- & \sqrt{2}\Delta^{--} \end{pmatrix} : (\mathbf{3}, -1); \quad \text{con} \quad \langle \Delta \rangle_0 = \begin{pmatrix} \nu_\Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right. \end{aligned} \right. \\
 & \text{Bosones Vectoriales} \{ W_\mu^1, \quad W_\mu^2, \quad W_\mu^3, \quad B_\mu. \quad (2.64)
 \end{aligned}$$

Se observa que el MTH incorpora nuevas partículas en el espectro, un bosón de Higgs doblemente cargado, dos bosones de Higgs simplemente cargados y un bosón de Higgs neutro. Todas las partículas se encuentran en estados de sabor y sin masa, sin embargo es necesario que los fermiones, bosones débiles y neutrinos adquieran masa. El doblete en el MEM permite que fermiones y bosones electrodébiles adquieran masa pero no incorpora la masa de los neutrinos, mientras que en el MTH el triplete va a permitir que los neutrinos

adquieran masa via la interacción de Yukawa. En particular se observa dentro del MEM que los neutrinos tienen las siguientes propiedades [20]: Son fermiones de espín $1/2$, pertenecen al doblete **2** de $SU(2)_L$, se introducen únicamente con quiralidad izquierda, son NO masivos y no presentan carga eléctrica.

Capítulo 3

Mecanismo See-saw tipo II

A lo largo del capítulo anterior, se han mostrado generalidades sobre diferentes representaciones en que se pueden clasificar todos los tipos de partículas en el MTH que va inducir el mecanismo See-saw tipo II, respetando ciertas condiciones como las de covarianza, renormalización y R.E.S. Se tienen así las posibles bases para partículas de materia (fermiones), para partículas que definen el vacío de la teoría (bosones escalares) y para partículas intermediarias de interacciones (bosones de gauge). El siguiente paso es describir la dinámica de tales partículas teniendo en cuenta las contribuciones dadas por el triplete de Higgs, por lo que se asignan las correspondientes densidades lagrangianas. En este capítulo se discute en detalle las densidades lagrangianas sus principales características y predicciones.

3.1. El triplete de Higgs

El mecanismo See-saw tipo II es una extensión del Modelo Estándar Electodébil en el que solamente el sector escalar es aumentado con un triplete de Higgs. En el capítulo anterior se encontró un triplete escalar complejo en representación 2×2 Ec. (2.46); este es particularmente rico en términos de sus implicaciones fenomenológicas. Este modelo proporciona masas de Majorana para los neutrinos sin necesidad de postular neutrinos derechos via la interacción de Yukawa. El triplete escalar está compuesto por bosones de Higgs doblemente cargados que pueden decaer a leptones, evidenciando un conjunto de canales de decaimiento. Estos canales pueden eventualmente demostrar la posible existencia de los escalares doblemente cargados y la posi-

bilidad de observación en los nuevos colisionadores de alta energía como por ejemplo el LHC. Explicitamente, el triplete y su valor esperado en el vacío tiene la forma dada por las Ec. (2.46) y (2.45):

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\Delta^0 & \Delta^- \\ \Delta^- & \sqrt{2}\Delta^{--} \end{pmatrix}; \quad \langle \Delta \rangle_0 = \begin{pmatrix} \nu_\Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A continuación se realiza la rotación de los estados de sabor a los estados físicos de masa para las componentes del triplete escalar.

3.2. El lagrangiano de Higgs

La derivada covariante permite escribir el acople de los bosones de gauge con los escalares ϕ y Δ . Los campos escalares se describen por la ecuación de Klein-Gordon, cuyo lagrangiano covariante toma la forma general:

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) + \frac{1}{2} (D_\mu \Delta)^\dagger (D^\mu \Delta) + V_H. \quad (3.1)$$

Similar a como se tiene en la sección A.6, se puede considerar diferentes representaciones de este lagrangiano según las representaciones de la derivada covariante de la sección A.5, en este caso depende de las representaciones del campo escalar. En particular, en el trabajo se considera el caso de representaciones de dobletes y tripletes en Φ .

3.2.1. El potencial de Higgs

La autointeracción entre bosones escalares está dada por el potencial de Higgs V_H . Para construir los términos del potencial hay que tener en cuenta que deben ser hermíticos, renormalizables e invariantes $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. El potencial de Higgs se construye acoplando términos cuadráticos, cúbicos y cuárticos entre los diferentes campos escalares que se tengan, los cuales según las Ec. (2.34) y (2.35) pueden ser dobletes, antidoubletes o tripletes. El triplete permite incorporar la masa de los neutrinos a través de la introducción de Higgs doblemente cargados (Δ^{++}), cargado, (Δ^+) y neutro (Δ^0). En particular en este modelo se toma la posibilidad de generar las masas del Modelo

Estándar Electrodébil a través de dobletes y masas para los neutrinos con un triplete. Se utiliza la notación tensorial para el doblete ϕ^i y Δ^{ij} para el triplete simétrico y con sus conjugadas respectivas $(\phi^i)^* = \phi_i$ y $(\Delta^{ij})^* = \Delta_{ij}$. Los términos del potencial que respetan la simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ son:

$$V_H = V_\phi + V_\Delta + V_{\phi-\Delta}, \quad (3.2)$$

con

$$V_\phi = \mu_1^2 \phi_i \phi^i + \lambda_1 (\phi_i \phi^i)^2, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} V_\Delta = & \frac{1}{2} \mu_2^2 \Delta_{ij} \Delta^{ij} + \lambda_2 (\Delta_{ij} \Delta^{ij})^2 + \lambda_3 (\varepsilon^{ij} \Delta_{jk} \varepsilon^{kl} \Delta^{li}) (\Delta_{ij} \varepsilon_{jk} \Delta^{kl} \varepsilon_{li}) \\ & + \lambda_4 \Delta^{ij} \Delta_{jk} \Delta^{kl} \Delta_{li} + \lambda_5 (\varepsilon^{ij} \Delta_{jk} \varepsilon^{kl} \Delta_{lm} \Delta^{mn} \varepsilon_{np} \Delta^{pq} \varepsilon_{qi}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} V_{\phi-\Delta} = & \lambda_6 (\phi_i \varepsilon^{ij} \Delta_{jk} \varepsilon^{kl} \phi_l + h.c.) + \lambda_7 (\Delta_{ij} \Delta^{ij}) (\phi_k \phi^k) \\ & + \lambda_8 \phi_i \Delta^{ij} \Delta_{jk} \phi^k + \lambda_9 (\phi_i \varepsilon^{ij} \Delta_{jk} \varepsilon^{kl} \varepsilon_{lm} \Delta^{mn} \varepsilon_{np} \phi^p). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Si $\mu_i^2 \leq 0$, el valor mínimo del potencial es cero, que en teoría cuántica de campos es un V.E.V nulo: $\langle \phi \rangle_0 = \langle \Delta \rangle_0 = 0$. Esto significa que el estado de vacío (cero partículas) es simétrico bajo el grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Por otro lado, si todos los coeficientes son $\mu_i^2 \geq 0$, el mínimo del potencial toma infinitos valores degenerados, que corresponde a un V.E.V distinto de cero. Significa que el estado de mínima energía no es el vacío (hay un condensado), por lo que el campo se puede separar como $\Phi = \langle \Phi \rangle_0 + \hat{\Phi}$, donde $\langle \Phi \rangle_0$ da cuenta del estado de mínima energía de Φ (que no es un verdadero vacío) y $\hat{\Phi}$ da cuenta de partículas en estados excitados solamente (es decir $\langle \hat{\Phi} \rangle_0 = 0$). De esta manera se puede expresar el potencial en términos de campos con V.E.V igual a cero (vacío de partículas) si se escriben los campos escalares como (según las Ec. (2.38), (2.39), (2.45) y (2.46)):

$$\phi = \hat{\phi} + \langle \phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu + H + i\zeta) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

$$\Delta = \hat{\Delta} + \langle \Delta \rangle_0 = \begin{pmatrix} \nu_\Delta + \sqrt{2}\Delta^0 & \Delta^- \\ \Delta^- & \sqrt{2}\Delta^{--} \end{pmatrix}.$$

Para hallar los valores que toman los coeficientes μ_i^2 en los potenciales (3.3) y (3.4), se aplica la condición del mínimo:

$$\frac{\partial \langle V_H \rangle}{\partial \nu} = 0; \quad \frac{\partial \langle V_H \rangle}{\partial \nu_\Delta} = 0, \quad (3.7)$$

donde $\langle V_H \rangle$ es el potencial evaluado en los valores esperados de los campos. De las condiciones (3.7) se obtiene directamente las dos soluciones para los parametros μ_i^2 :

$$\begin{aligned} \mu_1^2 &= -\lambda_1 \nu^2 + 2\lambda_6 \nu_\Delta - (\lambda_7 + \lambda_9) \nu_\Delta^2, \\ \mu_2^2 &= -4(\lambda_2 + \lambda_4) \nu_\Delta^2 + \lambda_6 \frac{\nu^2}{\nu_\Delta} - (\lambda_7 + \lambda_9) \nu^2, \end{aligned}$$

que son reemplazados en los potenciales (3.3) y (3.4). Para campos escalares, los términos de masa toman la forma genérica de el potencial general (3.2):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{masa} &= \phi^+ \phi^- [(\lambda_8 - \lambda_9) \nu_\Delta^2 + 2\lambda_6 \nu_\Delta] + \phi^+ \Delta^- \left[\sqrt{2} \lambda_6 + \frac{\nu_\Delta}{\sqrt{2}} (\lambda_8 - \lambda_9) \right] \nu \\ &+ \phi^- \Delta^+ \left[\sqrt{2} \lambda_6 + \frac{\nu_\Delta}{\sqrt{2}} (\lambda_8 - \lambda_9) \right] \nu + \Delta^+ \Delta^- \left[\frac{\lambda_6}{\nu_\Delta} + \frac{1}{2} (\lambda_8 - \lambda_9) \right] \nu^2 \\ &+ \Delta^{++} \Delta^{--} \left[4(\lambda_5 - \lambda_4) \nu_\Delta^2 + (\lambda_8 - \lambda_9) \nu^2 + \lambda_6 \frac{\nu^2}{\nu_\Delta} \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Del lagrangiano (3.8) se determina directamente los términos de masa para los $\Delta^{\pm\pm}$, con $\alpha_1 = \lambda_5 - \lambda_4$, $\alpha_2 = \lambda_8 - \lambda_9$ y $f = \lambda_6$, se obtiene entonces:

$$M_{\Delta^{\pm\pm}}^2 = 4\alpha_1 \nu_\Delta^2 + \alpha_2 \nu^2 + f \frac{\nu^2}{\nu_\Delta}. \quad (3.9)$$

Es posible construir la matriz de masa para los términos $\phi^\pm \Delta^\pm$ a partir de la Ec. (3.8) de la siguiente forma:

$$M_{\phi^\pm \Delta^\pm}^2 = \begin{bmatrix} (\alpha_2 \nu_\Delta + 2f) \nu_\Delta & \left(\sqrt{2} f + \frac{\nu_\Delta}{\sqrt{2}} \alpha_2 \right) \nu \\ \left(\sqrt{2} f + \frac{\nu_\Delta}{\sqrt{2}} \alpha_2 \right) \nu & \left(\frac{f}{\nu_\Delta} + \frac{1}{2} \alpha_2 \right) \nu^2 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

3.2.2. Diagonalización: sector cargado

Para obtener el espectro físico de partículas escalares, es necesario diagonalizar las matrices de masa. Para la matriz $M_{\phi^\pm \Delta^\pm}^2$ se obtiene que el $\det M_{\phi^\pm \Delta^\pm}^2 = 0$, asegurando al menos un bosón de Goldstone con masa cero (un valor propio es cero). La ecuación de valores propios es:

$$\det(M_{\phi^\pm \Delta^\pm}^2 - VP) = 0. \quad (3.11)$$

Resolviendo la Ec. (3.11) en el apéndice C Ec. (C.3) se encuentran los valores propios VP_1 y VP_2 :

$$VP_1 = 0; \quad VP_2 = \alpha_2 \nu_\Delta^2 + 2f\nu_\Delta + \left(\frac{f}{\nu_\Delta} + \frac{1}{2}\alpha_2 \right) \nu^2 \quad (3.12)$$

y se determinan los vectores propios Ec.(C.7):

$$V_1 = \begin{pmatrix} S_\theta \\ -C_\theta \end{pmatrix}; \quad V_2 = \begin{pmatrix} C_\theta \\ S_\theta \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

con:

$$S_\theta = \sin \theta = \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + 2\nu_\Delta^2}}; \quad C_\theta = \cos \theta = \frac{\sqrt{2}\nu_\Delta}{\sqrt{\nu^2 + 2\nu_\Delta^2}}. \quad (3.14)$$

Las transpuestas de los vectores propios (3.13) corresponden a las filas de la matriz de rotación entre la base de $M_{\phi^\pm \Delta^\pm}^2$ y la base de bosones físicos:

$$\begin{pmatrix} S_\theta & -C_\theta \\ C_\theta & S_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^\pm \\ \Delta^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^\pm \\ H^\pm \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

De esta forma de las Ec. (3.9) y (3.15), se obtiene el espectro de escalares cargados tabla 3.1 con sus respectivas masas al cuadrado (valores propios), donde G^\pm son **dos bosones de Goldstone** cargados sin masa que salen del espectro físico para dar masa a dos bosones de gauge igualmente cargados, H^\pm como **dos bosones de Higgs cargados** y por último **dos bosones de Higgs doblemente cargados** $H^{\pm\pm}$.

Escalares cargados	Masas al cuadrado
$G^\pm = S_\theta \phi^\pm - C_\theta \Delta^\pm$	$M_{G^\pm}^2 = 0$
$H^\pm = C_\theta \phi^\pm + S_\theta \Delta^\pm$	$M_{H^\pm}^2 = \alpha_2 \left(\nu_\Delta^2 + \frac{\nu^2}{2} \right) + 2f\nu_\Delta + f \frac{\nu^2}{\nu_\Delta}$
$H^{\pm\pm} = \Delta^{\pm\pm}$	$M_{H^{\pm\pm}}^2 = 4\alpha_1 \nu_\Delta^2 + \alpha_2 \nu^2 + f \frac{\nu^2}{\nu_\Delta}$

Tabla 3.1: Espectro escalar cargado físico

3.2.3. Sector neutro

Para este sector se toman los bosones escalares neutros complejos Δ^0 y $\overline{\Delta^0}$ de la siguiente forma:

$$\Delta^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(R + iI); \quad \overline{\Delta^0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(R - iI). \quad (3.16)$$

El lagrangiano de masa para el sector neutro encontrado a partir del potencial Higgs (3.2) es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{neutro} = & H^2(\nu^2 \lambda_1) + Z^2(2f\nu_\Delta) + R^2 \left(4(\lambda_2 + \lambda_4)\nu_\Delta^2 \frac{1}{2}f \frac{\nu^2}{\nu_\Delta} \right) + I^2 \left(\frac{1}{2}f \frac{\nu^2}{\nu_\Delta} \right) \\ & + RH[-2\nu f + 2\nu\nu_\Delta(\lambda_7 + \lambda_9)] + IZ(2\nu f). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Del lagrangiano (3.17) se construyen dos matrices, una real y otra imaginaria de la siguiente forma:

$$M_{Imag}^2 = \begin{bmatrix} 4f\nu_\Delta & 2f\nu \\ 2f\nu & f \frac{\nu^2}{\nu_\Delta} \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

$$M_{real}^2 = \begin{bmatrix} 2\lambda_1\nu^2 & -2\nu f + 2\nu\nu_\Delta(\lambda_7 + \lambda_9) \\ -2\nu f + 2\nu\nu_\Delta(\lambda_7 + \lambda_9) & 8(\lambda_2 + \lambda_4)\nu_\Delta^2 + f \frac{\nu^2}{\nu_\Delta} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

A continuación se procede a diagonalizar las matrices imaginaria y real.

3.2.4. Diagonalización: sector imaginario

La matriz imaginaria (3.18) tiene determinante cero, asegurando un bosón de gauge no masivo. Los valores propios para la matriz imaginaria son :

$$VP_1 = 0; \quad VP_2 = \frac{f}{\nu_\Delta} (\nu^2 + 4\nu_\Delta^2), \quad (3.20)$$

con los siguientes vectores propios dados por la Ec. (C.11):

$$V_1 = \begin{pmatrix} C_{\theta_2} \\ S_{\theta_2} \end{pmatrix}; \quad V_2 = \begin{pmatrix} -S_{\theta_2} \\ C_{\theta_2} \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

con:

$$S_{\theta_2} = \sin \theta_2 = \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + 4\nu_\Delta^2}}; \quad C_{\theta_2} = \cos \theta_2 = \frac{2\nu_\Delta}{\sqrt{\nu^2 + 4\nu_\Delta^2}}, \quad (3.22)$$

de nuevo las transpuestas de los vectores propios corresponden a las filas de la matriz de rotación entre la base de M_{Imag}^2 y la base de bosones físicos:

$$\begin{pmatrix} C_{\theta_2} & S_{\theta_2} \\ -S_{\theta_2} & C_{\theta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 \\ G^0 \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

obteniendo en la tabla 3.2 el espectro de bosones neutros con sus respectivas masas al cuadrado (valores propios).

Bosones neutros	Masas al cuadrado
$A^0 = C_{\theta_2}Z + S_{\theta_2}I$	$M_{A^0}^2 = 0$
$G^0 = -S_{\theta_2}Z + C_{\theta_2}I$	$M_{G^0}^2 = \frac{f}{\nu_\Delta} (4\nu_\Delta^2 + \nu^2)$

Tabla 3.2: Bosones neutros

De está manera se obtiene **un bosón pseudo escalar A^0 y un bosón de Higgs físico G^0** .

3.2.5. Diagonalización: sector real

Finalmente la matriz real (3.19) tiene los siguientes valores propios calculados en el apéndice C Ec. (C.17):

$$VP_1 \simeq f \frac{\nu^2}{\nu_\Delta}; \quad VP_2 \simeq \lambda_1 \nu^2, \quad (3.24)$$

se realiza una aproximación para encontrar los vectores propios en los cuales sea valida una interpretación física apéndice C Ec. (C.18):

$$V_1 = \begin{pmatrix} C_{\theta_3} \\ S_{\theta_3} \end{pmatrix}; \quad V_2 = \begin{pmatrix} -S_{\theta_3} \\ C_{\theta_3} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

con valores para S_{θ_3} y C_{θ_3} dados por las Ec. (C.19) y (C.20) respectivamente. Ahora encontrando la base de bosones físicos:

$$\begin{pmatrix} C_{\theta_3} & S_{\theta_3} \\ -S_{\theta_3} & C_{\theta_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^0 \\ H^0 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

De esta forma se obtiene el espectro de **bosones reales físicos** h^0 y H^0 con sus masas al cuadrado en la tabla (3.3).

Bosones reales	Masas al cuadrado
$h^0 = C_{\theta_3}H + S_{\theta_3}R$	$M_{h^0}^2 \approx \lambda_1 \nu^2$
$H^0 = -S_{\theta_3}H + C_{\theta_3}R$	$M_{H^0}^2 \approx f \frac{\nu^2}{\nu_\Delta}$

Tabla 3.3: Espectro real físico

3.3. El Sector cinético de Higgs

El sector cinético del lagrangiano de Higgs (3.1) acopla los bosones escalares con los bosones gauge. La parte cinética contiene dos términos uno que pertenece al doblete y el otro al triplete, se presenta a continuación cada uno de estos.

3.3.1. El Doblete

Tomando la parte correspondiente al doblete del lagrangiano (3.1) y expandiendo todos los términos de acuerdo a la Ec. (2.54) se encuentra que:

$$\begin{aligned}
(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) = & \partial_\mu \phi^- \partial^\mu \phi^+ + \partial_\mu \bar{\phi}^0 \partial^\mu \phi^0 \\
& - i \partial_\mu \phi^- \left[(g W_\mu^3 + g' Y_\phi B_\mu) \phi^+ + \frac{g}{2} (W_\mu^1 - i W_\mu^2) \phi^0 \right] \\
& - i \partial_\mu \bar{\phi}^0 \left[\frac{g}{2} (W_\mu^1 + i W_\mu^2) \phi^+ + \left(g' Y_\phi B_\mu - \frac{g}{2} W_\mu^3 \right) \phi^0 \right] \\
& + i \phi^- \left[\left(\frac{g}{2} W_\mu^3 + g' Y_\phi B_\mu \right) \partial^\mu \phi^+ + \frac{g}{2} (W_\mu^1 - i W_\mu^2) (\partial^\mu \phi^0) \right] \\
& + i \bar{\phi}^0 \left[\frac{g}{2} (W_\mu^1 + i W_\mu^2) (\partial^\mu \phi^+) + \left(-\frac{g}{2} W_\mu^3 + g' Y_\phi B_\mu \right) \partial^\mu \phi^0 \right] \\
& + \frac{g}{2} \phi^- \left[W_\mu^3 \left(\frac{g}{2} W_\mu^3 + g' Y_\phi B_\mu \right) \phi^+ + \frac{g}{2} (W_\mu^1 - i W_\mu^2) \phi^0 \right] \\
& + \frac{g}{2} \phi^- (W_\mu^1 - i W_\mu^2) \left[\frac{g}{2} (W_\mu^1 + i W_\mu^2) \phi^+ + \left(-\frac{g}{2} W_\mu^3 + g' Y_\phi B_\mu \right) \phi^0 \right] \\
& + \frac{g}{2} \bar{\phi}^0 \left[(W_\mu^1 + i W_\mu^2) \left(\frac{g}{2} W_\mu^3 + g' Y_\phi B_\mu \right) \phi^+ + \frac{g}{2} (W_\mu^1 - i W_\mu^2) \phi^0 \right] \\
& - \frac{g}{2} \bar{\phi}^0 W_\mu^3 \left[\frac{g}{2} (W_\mu^1 + i W_\mu^2) \phi^+ + \left(-\frac{g}{2} W_\mu^3 + g' Y_\phi B_\mu \right) \phi^0 \right] \\
& + g' \phi^- Y_\phi B_\mu \left[W_\mu^3 \left(\frac{g}{2} W_\mu^3 + g' Y_\phi B_\mu \right) \phi^+ + \frac{g}{2} (W_\mu^1 - i W_\mu^2) \phi^0 \right] \\
& + g' \bar{\phi}^0 Y_\phi B_\mu \left[\frac{1}{2} (W_\mu^1 + i W_\mu^2) \phi^+ + \left(-\frac{g}{2} W_\mu^3 + g' Y_\phi B_\mu \right) \phi^0 \right],
\end{aligned} \tag{3.27}$$

con el término (3.27) se construye las matrices de masa para los bosones W_μ^1 , W_μ^2 , W_μ^3 y B_μ , y teniendo en cuenta la Ec. (2.51) se encuentra:

$$M_{W_\mu^{1,2}}^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{g^2 \nu^2}{4} \\ \frac{g^2 \nu^2}{4} & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.28}$$

$$M_{W_\mu^3, B_\mu}^2 = \begin{bmatrix} \frac{g^2 \nu^2}{4} & \frac{-g g' \nu^2}{4} \\ \frac{-g g' \nu^2}{4} & \frac{g'^2 \nu^2}{4} \end{bmatrix}. \tag{3.29}$$

Si se diagonalizan las matrices (3.28) y (3.29) se encuentran las masas para los bosones débiles y el fotón no masivo, que es un resultado del MEM, pero el triplete de Higgs contribuye también a las masas de los bosones electrodébiles, es necesario determinar esta contribución expandiendo los términos del triplete.

3.3.2. El Triplete simétrico

Tomando la parte cinética del triplete en la Ec. (3.1) y expandiendo todos los términos de acuerdo a la Ec. (2.54) se encuentra que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(D_\mu \Delta^{ij})^\dagger (D^\mu \Delta^{ij}) = & \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu \Delta^{ij})^\dagger (\partial^\mu \Delta^{ij}) \right. \\
& - ig(\partial_\mu \Delta^{ij})^\dagger (W_k^i \delta_l^j + \delta_k^i W_l^j) \Delta^{ij} \\
& - ig'(\partial_\mu \Delta^{ij})^\dagger (B_\mu \delta_k^i \delta_l^j) \Delta^{kl} \\
& + ig\Delta_{mn}(W_i^m \delta_j^n + \delta_i^m W_j^n) \partial^\mu \Delta^{ij} \\
& + g^2 \Delta_{mn}(W_i^m \delta_j^n + \delta_i^m W_j^n)(W_k^i \delta_l^j + \delta_k^i W_l^j) \Delta^{kl} \\
& + gg' \Delta_{mn}(W_i^m \delta_j^n + \delta_i^m W_j^n)(B_\mu Y_\Delta \delta_k^i \delta_l^j) \Delta^{kl} \\
& + ig' \Delta_{mn}(B_\mu Y_\Delta \delta_i^m \delta_j^n) \partial_\mu \Delta^{ij} \\
& + gg' \Delta^{mn}(B_\mu Y_\Delta \delta_i^m \delta_j^n)(W_k^i \delta_l^j + \delta_k^i W_l^j) \Delta^{kl} \\
& \left. + ig'^2 \Delta_{mn}(B_\mu Y_\Delta \delta_i^m \delta_j^n)(B_\mu Y_\Delta \delta_k^i \delta_l^j) \Delta^{kl} \right], \quad (3.30)
\end{aligned}$$

de la Ec. (3.30) se determina la contribución del triplete de Higgs a las masas de los bosones débiles, además de los lagrangianos que involucran la dinámica de los bosones de Higgs cargados. reuniendo las ecuaciones (3.27) y (3.30), se encuentra para W_μ^3 y B_μ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{masa} = & g^2 \left(\frac{1}{8} \nu^2 + \frac{1}{2} \nu_\Delta^2 \right) (W_\mu^3)^2 - gg' \left(\frac{1}{8} \nu^2 + \frac{1}{2} \nu_\Delta^2 \right) B_\mu W_\mu^3 \\
& - gg' \left(\frac{1}{8} \nu^2 + \frac{1}{2} \nu_\Delta^2 \right) B_\mu W_\mu^3 + (g')^2 \left(\frac{1}{8} \nu^2 + \frac{1}{2} \nu_\Delta^2 \right) B_\mu^2, \quad (3.31)
\end{aligned}$$

el cual permite construir la siguiente matriz de masa:

$$M_{W_\mu^3, B_\mu}^2 = \begin{pmatrix} g^2 \left(\frac{1}{4} \nu^2 + \nu_\Delta^2 \right) & -gg' \left(\frac{1}{4} \nu^2 + \nu_\Delta^2 \right) \\ -gg' \left(\frac{1}{4} \nu^2 + \nu_\Delta^2 \right) & (g')^2 \left(\frac{1}{4} \nu^2 + \nu_\Delta^2 \right) \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

con los siguientes valores propios:

$$VP_2 = 0; \quad VP_2 = \frac{g^2}{4C_w^2} (\nu^2 + 4\nu_\Delta^2), \quad (3.33)$$

garantizando un fotón no masivo y un bosón masivo que se identificara con el bosón débil neutro Z_μ . Con los valores propios se determinan los vectores propios:

$$V_1 = \begin{pmatrix} C_w \\ -S_w \end{pmatrix}; \quad V_2 = \begin{pmatrix} S_w \\ C_w \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

con:

$$S_w = \sin \theta_w = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}; \quad C_w = \cos \theta_w = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad (3.35)$$

donde θ_w corresponde al ángulo de Weinberg, de tal manera que la matriz de transformación toma la forma:

$$\begin{pmatrix} C_w & -S_w \\ S_w & C_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Del de la Ec (3.30) se determina la contribución para los bosones $W_\mu^{1,2}$ y adicionando (3.28) se encuentra:

$$M_{W_\mu^{1,2}}^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{g^2}{4} (\nu^2 + 2\nu_\Delta^2) \\ \frac{g^2}{4} (\nu^2 + 2\nu_\Delta^2) & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

con valores propios:

$$VP_{1,2} = \pm \frac{g^2}{4} (\nu^2 + 2\nu_\Delta^2), \quad (3.38)$$

que corresponden a las masas de W_μ^+ y W_μ^- , y los correspondientes vectores propios:

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}; \quad V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

la matriz de transformación toma la forma:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^1 \\ W_\mu^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_\mu^+ \\ W_\mu^- \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

De esta manera se tienen los bosones débiles y el fotón con masas dadas por los valores propios (3.33) y (3.38), según se indica en la tabla (3.4).

Bosones Electrodébiles	Masas al cuadrado
$A_\mu = S_w W_\mu^3 + C_w B_\mu$	$M_A^2 = 0$
$Z_\mu = C_w W_\mu^3 - S_w B_\mu$	$M_Z^2 = \frac{g^2}{4C_w^2}(\nu^2 + 4\nu_\Delta^2)$
$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)$	$M_{W^\pm}^2 = \frac{g^2}{4}(\nu^2 + 2\nu_\Delta^2)$

Tabla 3.4: Bosones electrodébiles

Como una consecuencia de la introducción del triplete de Higgs las masas de los bosones débiles se modifican como se puede observar en la tabla 3.4. Un parámetro importante del MEM es el parámetro ρ definido como:

$$\rho = \frac{M_{W^\pm}^2}{C_w^2 M_Z^2}, \quad (3.41)$$

y cuyo valor es cercano a 1 de acuerdo al información experimental [9]. Éste parámetro impone cotas sobre el VEV del triplete de Higgs en $\nu_\Delta \lesssim 1\text{Gev}$. Ahora se procede a clasificar los términos de interacción de los bosones de Higgs cargados con las demás partículas. De la Ec. (3.30) se obtienen los vertices de interacción Delta-Delta-Vector-Vector:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\Delta-\Delta-V-V} = & \Delta^0 \overline{\Delta^0} \left[\frac{g^2}{C_w^2} Z_\mu Z^\mu + g^2 W_\mu^+ W^{\mu-} \right] \\
& + \Delta^0 \Delta^+ \left[-ge A_\mu W^{\mu-} + \frac{g^2}{C_w^2} (1 + S_w^2) Z_\mu W^{\mu-} \right] + \Delta^0 \Delta^{++} [g^2 W_\mu^- W^{\mu+}] + h.c \\
& + \Delta^{++} \Delta^- \left[-3ge A_\mu W^{\mu-} - \frac{g^2}{C_w} (1 - 3S_w^2) Z_\mu W^{\mu-} \right] + h.c \\
& + \Delta^{++} \Delta^{--} \left[g^2 W_\mu^- W^{\mu+} + 4e^2 A_\mu A^{\mu-} + \frac{g^2}{C_w^2} (1 - 2S_w^2)^2 Z_\mu Z^\mu + 4 \frac{eg}{C_w} (1 - 2S_w^2) A_\mu Z^\mu \right].
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Los diagramas de Feynman respectivos se encuentran en la figura D.1. Para la interacción Delta-Delta-Vector de la Ec. (3.30) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\Delta-\Delta-V} = & Z_\mu \left[\left(\overline{\Delta^0}_{(p)} \Delta^0_{(q)} + (1 - 2S_w^2) \Delta_{(p)}^{++} \Delta_{(q)}^{--} + S_w^2 \Delta_{(p)}^- \Delta_{(q)}^+ \right) \frac{g}{C_w} \right] [p^\mu - q^\mu] \\
& + \left[A_\mu \left(2\Delta_{(p)}^{--} \Delta_{(q)}^{++} + \Delta_{(p)}^{++} \Delta_{(q)}^{--} \right) e + W_\mu^+ \left(\Delta_{(p)}^+ \Delta_{(q)}^{--} + \overline{\Delta^0}_{(p)} \Delta_{(q)}^- \right) g \right] [p^\mu - q^\mu] \\
& + \left[W_\mu^- \left(\Delta_{(p)}^{++} \Delta_{(q)}^- + \Delta_{(p)}^+ \Delta_{(q)}^0 \right) g \right] [p^\mu - q^\mu].
\end{aligned} \tag{3.43}$$

con los diagramas de Feynman dados en la figura D.2, y los términos de interacción Delta-Vector-Vector de la Ec. (3.30) son:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\Delta-V-V} = & \Delta^0 \left[\left(W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{C_w^2} Z_\mu Z^\mu \right) \frac{g^2 \nu_\Delta}{\sqrt{2}} \right] + h.c \\
& + \Delta^+ \left[\left(-e \nu_\Delta A_\mu W^{\mu-} + g \frac{1 + S_w^2}{C_w} Z_\mu W^{\mu-} \right) \frac{g}{\sqrt{2}} \right] + h.c \\
& + \Delta^{++} \left[\frac{g^2 \nu_\Delta}{\sqrt{2}} W_\mu^+ W^{\mu-} \right] + h.c.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Los diagramas Feynman respectivos se presentan en la figura D.3. Se encontraron las masas al cuadrado y los estado físicos de masa para las componentes del triplete escalar además de los vertices de interacción. Ahora se procede a dotar de masa a los neutrinos con el lagrangiano de Yukawa y el triplete escalar.

3.4. El lagrangiano de Yukawa

De acuerdo a la subsección 2.3.2 el lagrangiano de Yukawa tiene términos bilineales de la forma (2.34) donde la tercera forma se descarta por no permitirse singletes, así el lagrangiano mas general tiene la forma:

$$\mathcal{L}_Y = \sum_{n,m=1}^3 \left[h^{nm} \overline{\psi^{(n)i}}_L \psi_R^{(m)} \phi^i + \frac{1}{\sqrt{2}} Y^{nm} \overline{\psi^{(n)i}}_L (\psi_L^{(m)j})^c \Delta^{ij} \right] + h.c. \quad (3.45)$$

h^{nm} y Y^{nm} son constantes de acoplamiento.

3.4.1. El lagrangiano con leptones

El lagrangiano para el doblete ϕ se escribe como:

$$\mathcal{L}_Y^\phi = \sum_{m,n=1}^3 h^{nm} \overline{\ell_L^{(n)i}} \ell_R^{(m)} \phi^i + h.c., \quad (3.46)$$

corriendo la suma para encontrar todos los términos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y^\phi = & h^{11} \overline{\nu_{eL}} e_R \phi^+ + h^{12} \overline{\nu_{eL}} \mu_R \phi^+ + h^{13} \overline{\nu_{eL}} \tau_R \phi^+ \\
& + h^{21} \overline{\nu_{\mu L}} e_R \phi^+ + h^{22} \overline{\nu_{\mu L}} \mu_R \phi^+ + h^{23} \overline{\nu_{\mu L}} \tau_R \phi^+ \\
& + h^{31} \overline{\nu_{\tau L}} e_R \phi^+ + h^{32} \overline{\nu_{\tau L}} \mu_R \phi^+ + h^{33} \overline{\nu_{\tau L}} \tau_R \phi^+ \\
& + \frac{\nu}{\sqrt{2}} (h^{11} \overline{e_L} e_R + h^{12} \overline{e_L} \mu_R + h^{13} \overline{e_L} \tau_R) \\
& + \frac{\nu}{\sqrt{2}} (h^{21} \overline{\mu_L} e_R + h^{22} \overline{\mu_L} \mu_R + h^{23} \overline{\mu_L} \tau_R) \\
& + \frac{\nu}{\sqrt{2}} (h^{31} \overline{\tau_L} e_R + h^{32} \overline{\tau_L} \mu_R + h^{33} \overline{\tau_L} \tau_R) \\
& + \frac{H}{\sqrt{2}} (h^{11} \overline{e_L} e_R + h^{12} \overline{e_L} \mu_R + h^{13} \overline{e_L} \tau_R) \\
& + \frac{H}{\sqrt{2}} (h^{21} \overline{\mu_L} e_R + h^{22} \overline{\mu_L} \mu_R + h^{23} \overline{\mu_L} \tau_R) \\
& + \frac{H}{\sqrt{2}} (h^{31} \overline{\tau_L} e_R + h^{32} \overline{\tau_L} \mu_R + h^{33} \overline{\tau_L} \tau_R) \\
& + \frac{i\zeta}{\sqrt{2}} (h^{11} \overline{e_L} e_R + h^{12} \overline{e_L} \mu_R + h^{13} \overline{e_L} \tau_R) \\
& + \frac{i\zeta}{\sqrt{2}} (h^{21} \overline{\mu_L} e_R + h^{22} \overline{\mu_L} \mu_R + h^{23} \overline{\mu_L} \tau_R) \\
& + \frac{i\zeta}{\sqrt{2}} (h^{31} \overline{\tau_L} e_R + h^{32} \overline{\tau_L} \mu_R + h^{33} \overline{\tau_L} \tau_R).
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Del lagrangiano (3.47) se observa que electrón, muón y tauón adquieren masa. Para la parte correspondiente al triplete simétrico del lagrangiano (3.45) se escribe:

$$\mathcal{L}_Y = \sum_{m,n=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2}} Y^{nm} \overline{\ell_L^{(n)i}} (\ell_L^{(m)j})^c \Delta^{ij} + h.c., \tag{3.48}$$

clasificando los términos de acuerdo al acoplamiento. Primero el acoplamiento Leptón-Leptón solamente para los términos de masa se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{l-l}^\Delta = & \frac{\nu_\Delta}{\sqrt{2}} \left[Y^{11} \overline{\nu_{eL}} (\nu_{eL})^c + 2Y^{12} \overline{\nu_{eL}} (\nu_{\mu L})^c + 2Y^{13} \overline{\nu_{eL}} (\nu_{\tau L})^c \right. \\
& \left. + Y^{22} \overline{\nu_{\mu L}} (\nu_{\mu L})^c + 2Y^{23} \overline{\nu_{\mu L}} (\nu_{\tau L})^c + Y^{33} \overline{\nu_{\tau L}} (\nu_{\tau L})^c \right].
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Se observa directamente de la Ec. (3.49) que los neutrinos adquieren masa por la introducción del triplete de Higgs, esto no sucede con el doblete. Ahora términos de interacción Leptón-Leptón-Delta:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{l-l-\Delta}^{\Delta} = & \Delta^0 \left[Y^{11} \overline{\nu_{eL}} (\nu_{eL})^c + 2Y^{12} \overline{\nu_{eL}} (\nu_{\mu L})^c + 2Y^{13} \overline{\nu_{eL}} (\nu_{\tau L})^c \right. \\
& + Y^{22} \overline{\nu_{\mu L}} (\nu_{\mu L})^c + 2Y^{23} \overline{\nu_{\mu L}} (\nu_{\tau L})^c + Y^{33} \overline{\nu_{\tau L}} (\nu_{\tau L})^c \left. \right] \\
& + \sqrt{2} \Delta^- \left[Y^{11} \overline{\nu_{eL}} (e_L)^c + 2Y^{12} \overline{\nu_{eL}} (\mu_L)^c + 2Y^{13} \overline{\nu_{eL}} (\tau_L)^c \right. \\
& + Y^{22} \overline{\nu_{\mu L}} (\mu_L)^c + 2Y^{23} \overline{\nu_{\mu L}} (\tau_L)^c + Y^{33} \overline{\nu_{\tau L}} (\tau_L)^c \left. \right] \\
& + \Delta^{--} \left[Y^{11} \overline{e_L} (e_L)^c + 2Y^{12} \overline{e_L} (\mu_L)^c + 2Y^{13} \overline{e_L} (\tau_L)^c \right. \\
& + Y^{22} \overline{\mu_L} (\mu_L)^c + 2Y^{23} \overline{\mu_L} (\tau_L)^c + Y^{33} \overline{\tau_L} (\tau_L)^c \left. \right].
\end{aligned} \tag{3.50}$$

3.4.2. Diagonalización: Generación de masa de neutrinos y el mecanismo See-saw

De la ecuación (3.49) se genera la siguiente estructura general del lagrangiano de masa para los neutrinos que toma la forma:

$$M_{nm} = \sqrt{2} \nu_{\Delta} Y^{nm} \doteq \sqrt{2} \nu_{\Delta} \begin{bmatrix} Y^{11} & Y^{12} & Y^{13} \\ Y^{21} & Y^{22} & Y^{23} \\ Y^{31} & Y^{32} & Y^{33} \end{bmatrix}. \tag{3.51}$$

El V.E.V ν_{Δ} se relaciona con las masas del triplete de Higgs según se encontró en las tablas 3.1-3.3. En general el ν_{Δ} toma valores muy pequeños comparado con el V.E.V ν del doblete de Higgs como por ejemplo se observó a través del parámetro ρ en la Ec. (3.41), de donde $\nu_{\Delta} \lesssim 1\text{Gev} \ll \nu = 246\text{Gev}$. De esta manera las masas de los bosones de Higgs físicos de las tablas 3.1-3.3 se pueden considerar como primera aproximación degeneradas y dadas por:

$$M_{H^0}^2 = M_{H^0}^2 = M_{H^{\pm}}^2 = M_{H^{\pm\pm}}^2 \approx f \frac{\nu^2}{\nu_{\Delta}}. \tag{3.52}$$

De esta manera la Ec. (3.51) se puede escribir como:

$$M_{nm} = \frac{\sqrt{2} f \nu^2 Y^{nm}}{M_H^2}. \tag{3.53}$$

Si se introduce un valor M_H^2 grande, se puede obtener masas de neutrinos livianos, lo cuál genera el **Mecanismo See-saw Tipo II**. Para pasar de los estados de sabor a los estados de masa hay que diagonalizar M_{nm} , lo cual se logra introduciendo una matriz unitaria U [7]:

$$M_{nm} = U \text{diag}(m_1, m_2, m_3) U^T, \quad (3.54)$$

m_1 , m_2 y m_3 son las masas físicas para los tres neutrinos y cuyos valores son tomados de acuerdo a la ref [24]. Los experimentos de oscilación de neutrinos son sensibles a las diferencias de las masas al cuadro $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$. Como el signo de Δm_{31}^2 no se ha podido determinar hasta el momento [7, 26], surgen distintos patrones para la jerarquía de las masas de los neutrinos: El caso en que $\Delta m_{31}^2 > 0$ se refiere a una jerarquía normal (NH) donde $m_1 < m_2 < m_3$. El caso con $\Delta m_{31}^2 < 0$ se conoce como jerarquía invertida (IH) donde $m_3 < m_1 < m_2$. Para la matriz U (matriz de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata), se adopta la siguiente parametrización:

$$U = V \text{diag}(1, e^{i\frac{\varphi_1}{2}}, e^{i\frac{\varphi_2}{2}}), \quad (3.55)$$

con

$$V = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -c_{23}s_{12} - s_{13}s_{23}c_{12}e^{i\delta} & c_{23}s_{12} - s_{13}s_{23}s_{12}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{23}s_{12} - s_{13}c_{23}c_{12}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - s_{13}c_{23}s_{12}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (3.56)$$

donde $s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij}$, $c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$ y δ son ángulos de mezcla y la fase de Dirac que en principio se pueden caracterizar en experimentos de oscilación de neutrinos [7]. Para neutrinos de Majorana aparecen dos fases adicionales φ_1 y φ_2 . De las Ec. (3.51) y (3.54) resulta:

$$Y^{nm} = \frac{1}{\sqrt{2}\nu_\Delta} U M_\nu U^T. \quad (3.57)$$

Esto proporciona una conexión directa entre Y^{nm} y la matriz de masa de los neutrinos que da lugar a predicciones fenomenológicas para los procesos que dependen de Y^{nm} . A través de la Ec. (3.57) es posible encontrar una relación numérica entre los parámetros medidos en los experimentos de oscilación de neutrinos y las constantes de Yukawa Y^{nm} , los valores numéricos se presentan

en el apéndice E para las dos jerarquías[7]. Hay otras formas de determinar las constantes de Yukawa a partir de la violación de sabor leptónico (LFV), el decaimiento doble beta, límites cosmológicos, las cuales permiten establecer cotas a las componentes de Y^{nm} .

Capítulo 4

El triplete escalar en el LHC

Se ha establecido con seguridad que los neutrinos oscilan y el mas liviano posee masa muy pequeña por debajo de la escala de eV [6] lo cual exige física más allá del Modelo Estándar(ME), y que podría manifestarse en el LHC [7, 25, 26, 27]. En consecuencia, modelos para la generación de masa de los neutrinos que puedan ser probados en los experimentos actuales y futuros son de gran interés fenomenológico.

En el capítulo anterior se mostró que los neutrinos adquirieron masa de Majorana a través del acoplamiento de los Yukawa Y^{nm} y el valor esperado del vacío (V.E.V) del triplete de escalar. Este triplete aparece como una representación de $SU(2)_L$ que permite expandir el sector escalar. En consecuencia, hay una conexión directa entre Y^{nm} y la matriz de masa de los neutrinos. Una señal distintiva del MTH sería la observación de bosones de Higgs doblemente cargados $H^{\pm\pm}$, cuya masa ($M_{H^{\pm\pm}}$) puede ser del orden desde la escala electrodébil hasta la escala de los TeV. Estas partículas pueden en principio ser producidas con tasas importantes en los colisionadores de hadrones en procesos partónicos $q\bar{q} \rightarrow H^{\pm\pm}H^{\mp\mp}$ [28, 29, 30, 31, 32] y $q\bar{q}' \rightarrow H^{\pm\pm}H^{\mp}$ [28, 33, 34]. Búsquedas de $H^{\pm\pm}$ se han realizado en el Tevatron del Fermilab, asumiendo la producción del canal $q\bar{q} \rightarrow H^{\pm\pm}H^{\mp\mp}$ y el decaimiento leptónico $H^{\pm\pm} \rightarrow \ell^{\pm}\ell^{\pm}$ ($\ell = e, \mu, \tau$), encontrando cotas inferiores de su masa en el rango de 110-150GeV [34, 35, 36, 37, 38]. A continuación se presenta una introducción de la física de colisionadores, luego se exploran las características de una posible señal de bosones de Higgs doblemente cargados a nivel del LHC y por último se procede a reproducir simulaciones de colisiones de protones.

4.1. Introducción a la Física de Colisionadores

El conocimiento de la leyes de la Física en el dominio subnuclear (a escalas cercanas a 10^{-13} cm y más pequeñas), es en gran parte debido al análisis de los resultados de colisiones de partículas elementales. Mientras que el tamaño y la sofisticación de cada componente de experimentos con colisiones a altas energías sigue incrementándose, el montaje experimental básico ha permanecido intacto desde el año 1960. Primero un acelerador de partículas emplea una combinación cuidadosamente designada de campos eléctricos y magnéticos para producir haces estrechamente enfocados de partículas energéticas (típicamente electrones, protones y sus antipartículas)[39]. Entonces, dos haces chocan de frente, frecuentemente con momentos iguales y opuestos, tal que el marco de referencia del centro de masa del sistema que ha colisionado coincide con el marco de referencia de laboratorio ¹. La región donde ocurren las colisiones (el “punto de interacción”) está rodeado por un conjunto de detectores de partículas los cuales intentan identificar las partículas salientes de la colisión y miden sus energías y momentos.

Los experimentos con colisionadores modernos coleccionan y analizan resultados de un gran número de colisiones; el número de eventos con propiedades específicas dentro del conjunto de datos coleccionados es proporcional a la probabilidad de cualquier evento [39]. Así, la probabilidad de un resultado específico de una colisión (una cantidad típicamente usada en la física de partículas “*la sección eficaz*”) provee un puente natural entre la teoría y el experimento. Se podría decir que el trabajo de la teoría de partículas es inferir las leyes de la física desde secciones eficaces medidas experimentalmente. No se conoce un algoritmo que logre hacer este trabajo. Hay sin embargo, un formalismo bien desarrollado para predecir secciones eficaces, dado un Lagrangiano de la teoría cuántica de campos. En la práctica, el procesamiento de los datos de los colisionadores permite seleccionar una teoría, al calcular secciones eficaces relevantes dentro de esta, y al comparar los datos con las predicciones teóricas.

¹Durante tres décadas antes de los avances en la tecnología de aceleradores, la principal técnica era acelerar un solo haz y chocarlo dentro de un blanco estacionario

4.1.1. Definiciones y Fundamentos.

Considerando una colisión de dos partículas elementales A y B en un marco de referencia donde el momentum neto del par es cero, este marco de referencia es conocido como el de centro de masas y se encuentra en reposo. Para los colisionadores de hadrones A y B son partones (quarks o gluones), y el marco de referencia del centro de masas se llamará el “*marco del partón*” en este caso, generalmente se está moviendo a lo largo del eje de colisión con respecto al sistema de referencia de laboratorio. En cualquier caso, se despreciarán las masas de A y B , siendo muy pequeñas comparadas con la energía en la que estamos interesados, (del orden de 14 GeV) por convención se escoge el eje z a lo largo de la dirección del momentum de A . El cuadrimomento de las partículas colisionantes es [39]:

$$p_A = (E, 0, 0, +E), \quad (4.1)$$

$$p_B = (E, 0, 0, -E). \quad (4.2)$$

La energía total del sistema colisionante, *la energía del centro de masas*, es $E_{cm} = 2E$. Se usa, frecuentemente $s = (p_A + p_B)^2 = E_{cm}^2$. En el caso del colisionador de hadrones, la energía del centro de masas en una colisión de dos partones será denotada por \sqrt{s} , para distinguirla de la energía del par de hadrones colisionantes \sqrt{s} [39].

En los colisionadores de partículas, las colisiones toman lugar entre haces que contienen un gran número de partículas. Si dos haces colisionan de frente, el número de colisiones resultantes en el estado final con características particulares (tipo de partículas, sus momentos, etc) son proporcionales al número de partículas en cada haz N_A y N_B e inversamente proporcionales a el área de la sección eficaz A . El coeficiente de proporcionalidad es la *sección eficaz*:

$$\sigma = \frac{\text{Número de eventos} \cdot A}{N_A N_B}, \quad (4.3)$$

el número de eventos (N_{ev}) puede escribirse como:

$$N_{ev} = L \cdot \sigma, \quad (4.4)$$

donde

$$L = \frac{N_A N_B}{A}, \quad (4.5)$$

si la ecuación (4.5) se multiplica por la frecuencia con que el haz colisiona se obtiene la **luminosidad instantánea**. La cantidad L junto con E_{cm} , contienen toda la información sobre los experimentos a analizar en un colisionador. Los valores medidos experimentalmente de la sección eficaz se infieren de la Ec. (4.4), estos valores pueden ser comparados con los predichos teóricamente.

Name	Type	\sqrt{s} (GeV)	L_{int} (pb $^{-1}$)	Years of operation	Detectors	Location
LEP	e^+e^-	91.2 (LEP-1) 130-209 (LEP-2)	≈ 200 (LEP-1) ≈ 600 (LEP-2)	1989-95 (LEP-1) 1996-2000 (LEP-2)	ALEPH, OPAL, DELPHI, L3	CERN
SLC	e^+e^-	91.2	20	1992-98	SLD	SLAC
HERA	$e^\pm p$	320	500	1992-2007	ZEUS, H1	DESY
Tevatron	$p\bar{p}$	1800 (Run-I) 1960 (Run-II)	160 (Run-I) 6 K (Run-II, 06/09)	1987-96 (Run-I) 2000-??? (Run-II)	CDF, DØ	FNAL
LHC	pp	14000	10 K/yr ("low-L") 100 K/yr ("high-L")	2010? - 2013? 2013?? - 2016???	ATLAS, CMS	CERN
ILC	e^+e^-	500-1000	1 M???	???	???	???

Figura 4.1: Recientes y futuras fronteras de energía de los colisionadores de energía (Parámetros listados para el LHC y el ILC .) [39]

La figura (4.1) muestra los parámetros básicos de colisionadores recientes de alta energía comparados con el LHC. Es importante tener en mente que para colisionadores de hadrones, la energía del centro de masas corresponde a los (anti)protones colisionantes. Siendo que los procesos a altas energías son iniciados por partones, los cuales únicamente llevan una fracción del protón, las escalas de energía que pueden ser probadas en un colisionador de hadrones son menores que esta energía, típicamente por factores de 3 – 10 dependiendo de los procesos. Los valores de luminosidad mostrados en la figura (4.1) son luminosidades integradas, $L_{int} = \int L dt$ sobre el tiempo de vida del experimento. La figura (4.1) también lista los detectores de cada colisionador.

4.1.2. Búsqueda para la Nueva Física

Se tiene un modelo extendido del ME que predice nuevas partículas a una escala de energía dentro del alcance del LHC. Se necesita identificar sus alcances experimentales, idear una estrategia para el análisis de datos,

maximizar la sensibilidad a la nueva física y evaluar cuántos datos se podrían requerir para verificar la teoría. La estrategia depende de las nuevas partículas (Higgs doblemente cargados), de sus interacciones y del experimento. Sin embargo, se pueden establecer una serie de pasos que se detallan a continuación:

- (1) El modelo predice Higgs doblemente cargados y se debe diseñar la búsqueda de estas partículas. Empezar con el Lagrangiano del modelo. Identificar todos los acoplamientos del Higgs doblemente cargado al modelo estándar. Listar los vértices involucrando al Higgs doblemente cargado y los estados ME.
- (2) Dados los vértices, identificar mecanismos de producción del Higgs doblemente cargado en el colisionador de interés. Dibujar diagramas de Feynman con Higgs doblemente cargados en el estado final. Recordar que las secciones eficaces generalmente decrecen con el número de vértices de interacción y con el número de partículas en el estado final para poder dibujar diagramas tan simple como sea posible. El estado final con secciones eficaces mayores involucrarán pocas partículas pesadas. Si las nuevas partículas pueden ser producidas en forma simple, el proceso será dominante. Si solo la producción es prohibida por simetrías (por ejemplo la paridad en modelos supersimétricos), la producción de pares dominará.
- (3) Basados en las consideraciones anteriores, identificar los procesos de producción de Higgs doblemente cargados más prometedores. Los procesos mediados por la **QCD** tendrán secciones eficaces mayores que procesos electrodébiles.
- (4) Cuidadosamente derivar las reglas de Feynman para todos los vértices que entran a los procesos de producción más prometedores.
- (5) Calcular la sección eficaz total para cada proceso prometedor. No imponer cortes cinemáticos a menos que sea necesario quitar singularidades. Si es necesario imponer cortes deben ser consistentes con condiciones experimentales. Dada la luminosidad integrada del colisionador calcular el número de eventos N_{ev} esperados en el conjunto de datos para cada uno de los procesos.
- (6) Si $N_{ev} < 10$ para un proceso dado, el proceso no es interesante probablemente. Notar que N_{ev} depende típicamente de parámetros de un modelo conocido *a-priori* tal como la masa de Higgs doblemente cargado. En tanto que existe un rango de valores de los parámetros, consistente con las consid-

eraciones teóricas y con las ligaduras de los experimentos anteriores donde la condición $N_{ev} > 10$ se satisface, así vale la pena continuar con el análisis.

(7) Identificar todos los vértices a través de los cuales Higgs doblemente cargados pueden decaer. Para cada canal de decaimiento posible, verificar que es cinemáticamente permitido.

(8) Listar todos los estados finales en términos del “detector de objetos” leptones del ME, fotones, jets partículas invisibles para los detectores como los neutrinos.

(9) Para cada estado final listar todos los procesos del ME que se lleven a cabo (el background), para diferenciarlos de nuevos procesos.

(10) Calcular la sección eficaz para cada proceso del background y de las nuevas partículas, para identificar posibles señales de nueva física. Por último, multiplicar por la luminosidad para obtener el número de eventos.

4.2. El experimento del LHC

El LHC es un acelerador y colisionador de partículas construido para colisionar haces de hadrones, mas exactamente protones a una energía máxima de 7 Tev cada uno. Dentro del LHC dos haces de protones en sentidos contrarios son acelerados hasta alcanzar una velocidad cercana a la velocidad de la luz con una energía máxima de 14 Tev. La operación del LHC representa una oportunidad para explorar la física mas allá de la escala electrodébil. Por ejemplo, el LHC proveerá una oportunidad para detectar y medir [7] bosones de Higgs cargados y de esta manera reconocer el mecanismo apropiado para la generación de masa de neutrinos.

4.2.1. La composición del protón: Las funciones de estructura partónica

El modelo partónico fue propuesto por Feynman y Bjorken a finales de los sesenta como una manera de analizar las colisiones de hadrones a alta energía dando origen al esquema de escalamiento [40]. Se reconoció más tarde que los partones describían los mismos objetos que ahora se conocen como quarks y gluones. El modelo describe los hadrones (en el caso del LHC protones) como un conjunto de partículas puntuales casi libres. Las secciones eficaces

del proceso $\sigma(pp \rightarrow X)$ se pueden calcular en primera aproximación tomando los protones como partículas de Dirac, pero como el momento transferido es muy grande es necesario considerar que el campo de gauge interactúa solo con uno de los constituyentes del protón. Se asume que cualquier hadrón observado físicamente está constituido por partones que no interactúan entre sí [40]. En el modelo partónico, la sección eficaz es la suma incoherente de las dispersiones de partículas puntuales [40]. De esta manera $\sigma(pp \rightarrow X)$ es:

$$\sigma(pp \rightarrow X) = \sum_{q_i, q_j} \int_0^1 dx dx' \sigma(q_i q_j \rightarrow X) f_i(x) f_j(x'), \quad (4.6)$$

donde la suma es sobre los partones constituyentes de cada protón (q_i, q_j) , $\sigma(q_i, q_j \rightarrow X)$ es la sección eficaz en la aproximación de Born para el proceso $q_i, q_j \rightarrow X$ y $f_{i(j)}(x)$ como la probabilidad de encontrar el quark i o j dentro del protón también conocida como las *funciones de distribución partónicas*. Lo importante del modelo partónico es que no es necesario solucionar el problema de la estructura del hadrón. En cambio, la información requerida está disponible en los experimentos. La cromodinámica cuántica (QCD) da una idea más detallada de la estructura del protón, ya que permite interacciones entre los partones, vía el intercambio de gluones. Estos modelos son conocidos como Esquemas de Factorización [40]. Para el caso de la simulación se utiliza las funciones de distribución partónicas para el protón dadas por CTEQ6m incluidas en el paquete CalcHEP. La cinemática para colisiones de partículas es descrita en el apéndice F.

4.2.2. Colisiones p-p: Los cortes cinemáticos, el problema del background

Para simular las colisiones protón-protón se utiliza el programa CalcHEP [41] que permite incorporar el Modelo de Triplete de Higgs que a su vez incorpora el mecanismo See-saw tipo II. Cuando ocurre la colisión entre protones se producen muchas partículas ya conocidas que constituyen el ruido de fondo ó background predicho por MEM. La idea es reducir este background para poder identificar posibles señales de bosones de Higgs doblemente cargados. Un esquema básico de la colisión p-p se muestra en la figura 4.2.

La interacción entre partículas del Modelo Estándar Electrodébil (MEE) contribuyen principalmente en ángulos θ pequeños en los que hay gran presencia

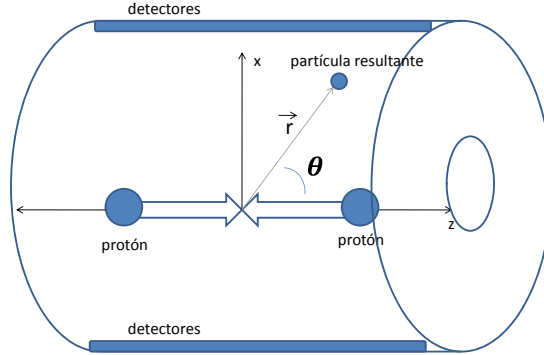


Figura 4.2: Esquema de colisión p-p

de leptones como estados finales. En general la nueva física estará asociada a partículas con masas grandes como los $H^{\pm\pm}$, los cuales poseerán un gran momento transversal, produciendo contribuciones para leptones como estados finales para θ grandes. Así, para pequeños ángulos se va a tener un exceso de background del MEE, mientras que la nueva física es mas probable de encontrarla a grandes momentos transversales asociados a ángulos grandes. El programa calcHEP calcula las secciones eficaces de todas la partículas tanto del MEE como de los Higgs cargados además de sus canales de decaimiento. Es posible limitar el sector donde se desea calcular las secciones eficaces y canales de decaimiento a partir de cortes geométricos, conocidos como cortes cinemáticos. En la figura 4.3 se muestra un ejemplo de corte cinemático para el ángulo de dispersión tanto para partículas de MEE como para los bosones de Higgs doblemente cargados.

4.3. Producción y decaimiento de bosones de Higgs doblemente cargados

Se considera el siguiente proceso tipo Drell-Yan en el que una de las componentes del triplete escalar se puede producir en el LHC:

$$pp \rightarrow Z^*/A^* \rightarrow H^{++}H^{--},$$

Sus secciones eficaces dependen solo de las masas escalares, porque las interacciones están fijadas por el acoplamiento del triplete. Las secciones eficaces

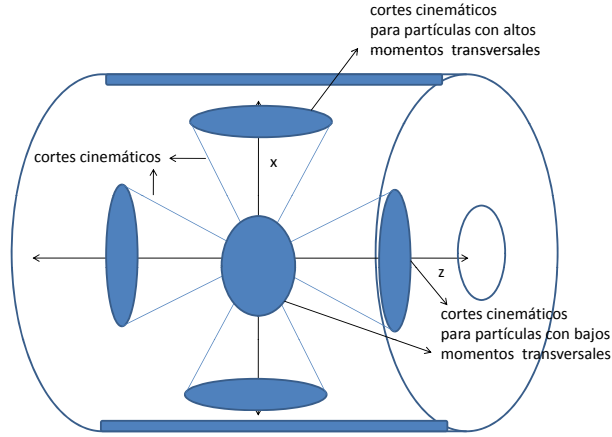


Figura 4.3: Cortes cinemáticos para el ángulo de dispersión para partículas del MEE y bosones de Higgs doblemente cargados

para $H^{\pm\pm}$ y H^\pm para una energía de 14 Tev son graficadas en la figura 4.4, como funciones de las masas escalares. Como se observa en la gráfica, la producción de $H^{\pm\pm}$ es la que más contribuye en relación a la producción de H^\pm . Los procesos que involucran producción de H^0 no son incluidos porque ellos no contribuyen a estados finales con leptones cargados, los cuales tienen mayor facilidad de detección.

4.3.1. Canales de producción a dos leptones: Los anchos de decaimiento

Para el caso específico de los decaimientos de $H^{\pm\pm}$ a dos leptones, el ancho de decaimiento esta dado por [7]:

$$\Gamma(H^{\pm\pm} \rightarrow \ell^\pm \ell^\pm) = \frac{M_{H^{\pm\pm}}}{4\pi(1 + \delta_{nm})} |Y^{nm}|^2. \quad (4.7)$$

Usando la Ec. (3.57), la suma de los anchos para estados finales dileptonicos esta dada por [7]:

$$\sum_{nm} \Gamma(H^{\pm\pm} \rightarrow \ell^\pm \ell^\pm) = \frac{M_{H^{\pm\pm}}}{8\pi} \frac{\sum M_\nu^2}{4\nu_\Delta^2}. \quad (4.8)$$

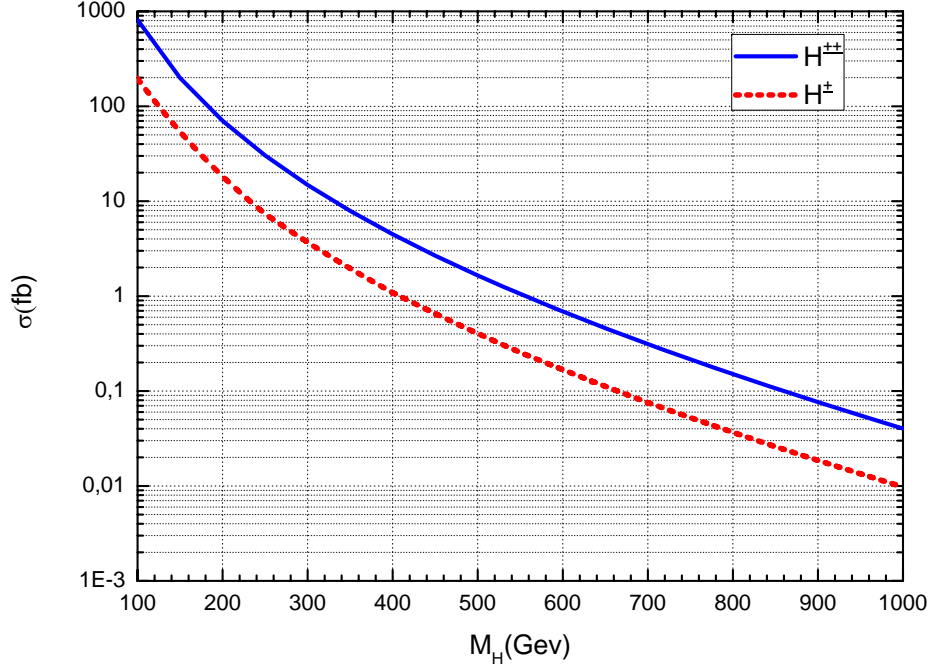


Figura 4.4: Secciones eficaces para la producción de $H^{\pm\pm}$ y H^{\pm}

Los decaimientos de $H^{\pm\pm} \rightarrow e^{\pm}e^{\pm}/\mu^{\pm}\mu^{\pm}/e^{\pm}\mu^{\pm}$, son muy limpios, produciendo dos leptones cargados con una masa invariante cercana a $M_{H^{\pm\pm}}$. Por el contrario decaimientos a tauones son difíciles de identificar porque pueden decaer leptónicamente $\tau \rightarrow e\nu\bar{\nu}$, $\tau \rightarrow \mu\nu\bar{\nu}$, resultando electrones y muones menos energéticos que los tauones originales. Desde el punto de vista de la simulación, los electrones y muones se producen por igual, con una eficiencia de detección similar debido al alto momento transversal.

4.4. Reconstrucción de señales en el LHC: Simulación de señales y background

La simulación de señales a cuatro leptones como estados finales a través de la producción de bosones de Higgs doblemente cargados, se da vía el proceso

$pp \rightarrow Z^*/A^* \rightarrow H^{++}H^{--}$ seguido por el decaimiento leptónico $H^{\pm\pm} \rightarrow \ell^{\pm}\ell^{\pm}$ (con $\ell = e, \mu$). La señal es reconstruida usando los parámetros de producción del LHC. La configuración para la simulación de las señales y background es la siguiente:

- **Generación de Señales:** Se utiliza el paquete CalcHEP v.2.5.6 para calcular las secciones eficaces. Para este propósito se ha incluido los vértices de interacción relevantes en el archivo del modelo de CalcHEP. Se usa las funciones de distribución partónica CTEQ6m para la estructura del protón incluidas en el paquete. El número de eventos generados está dado para una luminosidad de 30 fb^{-1} .
- **Generación de background:** Se genera un ruido de fondo generado únicamente por procesos puramente electrodébiles teniendo en cuenta todos los decaimientos leptónicos ($\ell = e, \mu$) a cuatro cuerpos.

Además para la señales y background se utilizan los siguientes cortes cinemáticos [7]:

- Para los cuatro leptones se fijan dos que tengan momento transversal $|p_T| > 30 \text{ GeV}$, el cual reduce el Background.
- Se fija la pseudorapidez en el siguiente rango $-2.5 < \eta < 2.5$ que establece la región de detección del detector
- La masa invariante para señales dileptónicas opuestas se fija $m_{\ell^+\ell^-} > 20 \text{ GeV}$. Esto reduce el background donde pares de leptones de signos opuestos provienen de fotones.
- La brecha de Z 's, $|m_{\pm\mp} - M_Z| > 5 \text{ GeV}$ remueve eventos donde los leptones provienen de los decaimientos de Z .
- Se fija la energía total transversal $H_T > 300 \text{ GeV}$, que impone una condición adicional para distinguir las señal por encima del background.

El efecto de los cortes en la señal y background para una masa de 200 GeV, 300 GeV y 800 GeV para los bosones de Higgs doblemente cargados se presenta en las figuras 4.5-4.10, las cuales representan distribuciones de masa invariante. Se observa que todas las señales para $H^{\pm\pm}$ para NH y IH presentan un pico distinguible por encima del ruido, para $H^{\pm\pm} = 200 \text{ GeV}$ hay un

pico 1.5 eventos/10 GeV para NH, y 30 eventos/10 GeV para IH, mientras que $H^{\pm\pm} = 300$ GeV tiene un pico de 0.33 eventos/10 GeV para NH y 7 eventos/10 GeV para IH, por último $H^{\pm\pm} = 800$ GeV presenta 0.0035 eventos/10 GeV para NH y 0.07 eventos para IH. El hecho de que el esquema IH muestre mayor nivel de observación proviene de la matriz (3.56) y de la relación introducida por la Ec. (3.57) para las constantes de Yukawa, las cuales dan más grandes para IH que para NH, generando mayor probabilidad de producción en un caso que en el otro. También se observa que la señal se reduce drásticamente a medida que la masa del bosón de Higgs cargado aumenta y que el background prácticamente se puede reducir a señales indetectables gracias a los cortes cinemáticos impuestos.

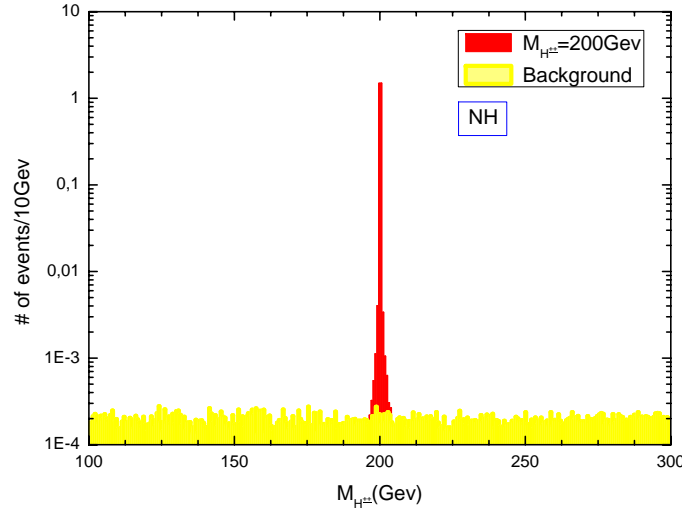


Figura 4.5: Distribución de masa invariante $M_{\ell^\pm\ell^\pm} = 200$ GeV en NH para la señal dileptonica y background

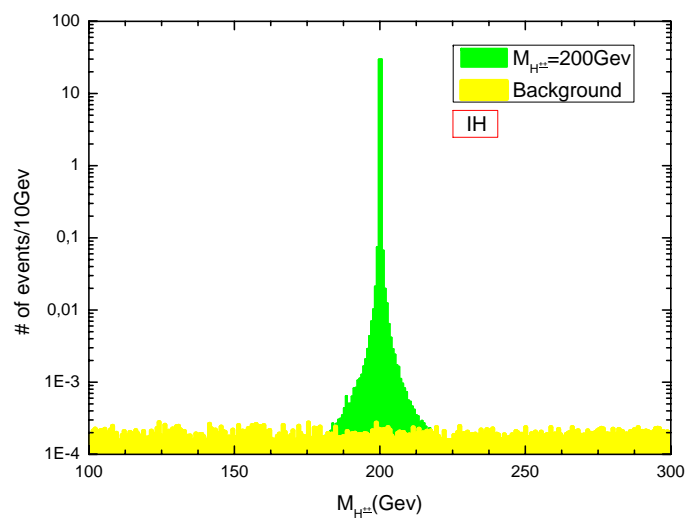


Figura 4.6: Distribución de masa invariante $M_{\ell^\pm\ell^\pm} = 200$ Gev en IH para la señal dileptonica y background

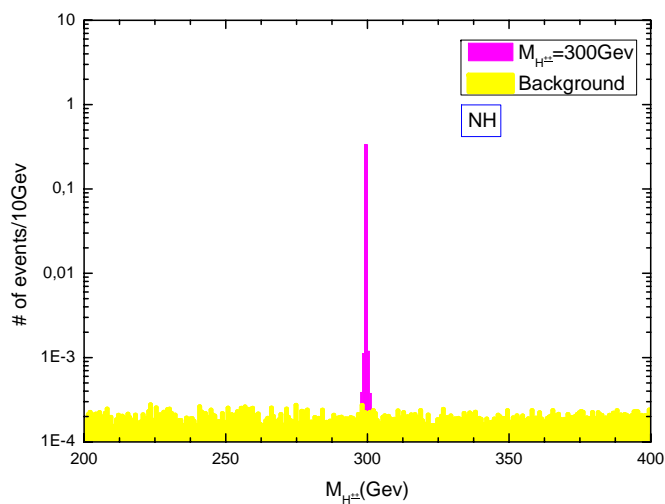


Figura 4.7: Distribución de masa invariante $M_{\ell^\pm\ell^\pm} = 300$ Gev en NH para la señal dileptonica y background

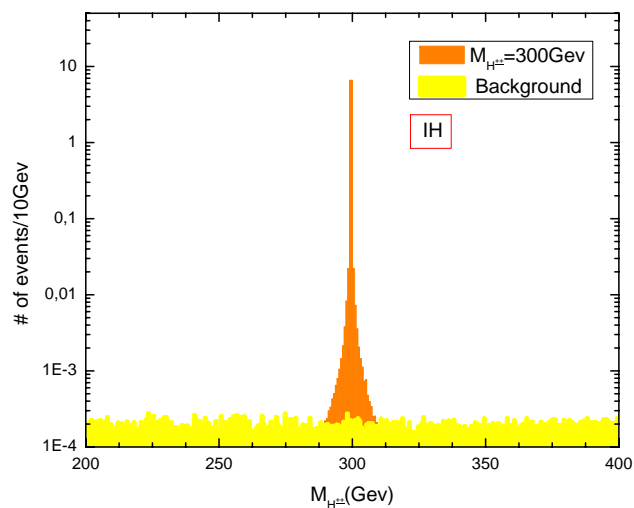


Figura 4.8: Distribución de masa invariante $M_{\ell^\pm\ell^\pm} = 300$ GeV IH para la señal dileptonica y background

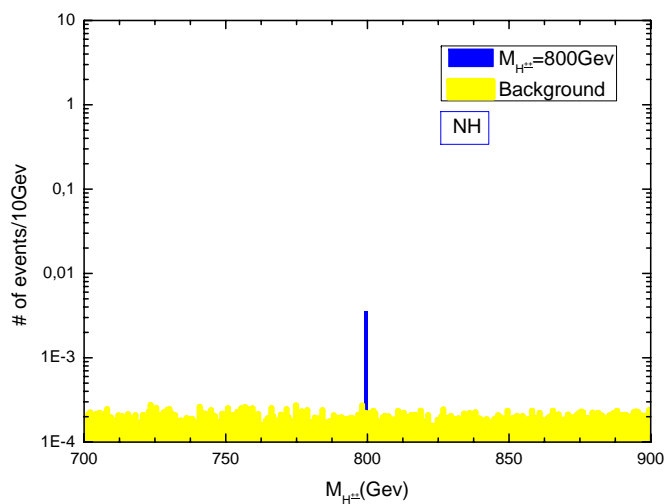


Figura 4.9: Distribución de masa invariante $M_{\ell^\pm\ell^\pm} = 800$ GeV en NH para la señal dileptonica y background

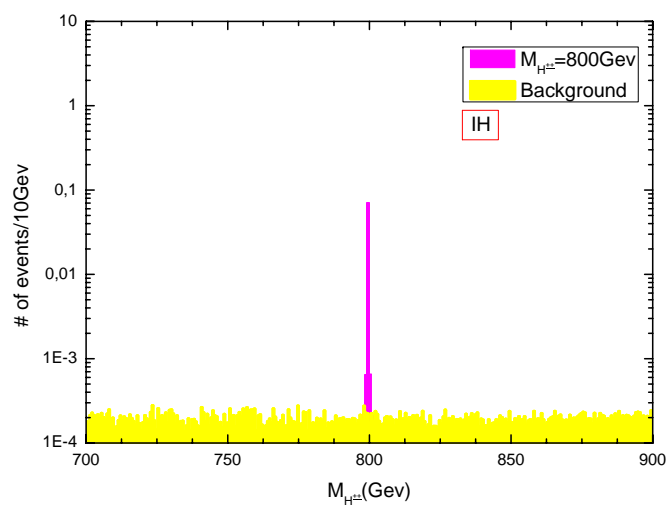


Figura 4.10: Distribución de masa invariante $M_{\ell^\pm\ell^\pm} = 800$ GeV IH para la señal dileptonica y background

Capítulo 5

Sumario y Conclusiones

A partir del estudio de la estructura matemática del Modelo Estándar Electrodébil (MEE) de partículas elementales en el capítulo II, se entendió la necesidad de incorporar un mecanismo para obtener partículas fundamentales con masas, encontrando como resultado la incorporación de un doblete escalar dando origen al bosón de Higgs del MEM de espín cero y eléctricamente neutro. Sin embargo la presencia de un solo doblete de Higgs no permite la incorporación de masas de los neutrinos. Motivado en el fenómeno de oscilación de neutrinos, el cual sugiere la existencia de neutrinos masivos, se procedió a estudiar las condiciones mínimas necesarias para obtener un modelo con neutrinos, aunque livianos, con masa distinta de cero. En particular, los mecanismos See-saw, a través de la ampliación del espectro, no sólo permiten obtener neutrinos masivos, sino además permiten entender porqué su masa es mucho más pequeña que sus compañeras cargadas. De entre los distintos tipos de mecanismos See-saw, resulta de gran interés los de tipo II en el cuál se introducen nuevas partículas escalares: Un bosón de Higgs doblemente cargado, dos simplemente cargados y uno neutro adicional al del doblete de Higgs del MEM, los cuales a partir de condiciones de simetría (invariancia local) y renormalización (condiciones propias de los modelos de partículas elementales), se organizan en representaciones 2×2 de un triplete escalar complejo E_c . (2.46). En particular, la presencia de una partícula doblemente cargada en el mecanismo de tipo II permite estudiar nuevos procesos físicos y de producción fuertemente ligada a dicha partícula y con altas probabilidades de ser identificada en la nueva generación de colisionadores, como por ejemplo en el Gran Colisionador Hadrónico en el CERN. Con base a dicha motivación en el capítulo III, se determinó el po-

tencial de Higgs más general para el modelo de triplete de Higgs que respeta la simétrica $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Con lo anterior, se procedió a la construcción y diagonalización de las matrices de masa para obtener el espectro físico completo del modelo, los resultados son resumidos en las tablas 3.1-3.3. La adquisición de masa es consecuente con el mecanismo de Higgs, donde se debe conservar el número de grados de libertad en el sector bosónico. Al estudiar los esquemas de generación de masa de los neutrinos se identificó que los neutrinos adquieren masa de Majorana a través del acoplamiento de los Yukawa y el valor esperado del vacío (V.E.V) del triplete escalar. Otro resultado y consecuencia de la introducción del triplete de Higgs es la corrección a las masas de los bosones débiles tabla 3.4, los cuales deben respetar los datos experimentales de los parámetros electrodébiles.

Para explorar las características de una posible señal de bosones de Higgs doblemente cargados a nivel del LHC en el capítulo IV, se reproducen simulaciones de colisiones de protones utilizando el paquete CalcHEP que permite incorporar el modelo de triplete de Higgs que induce el mecanismo See-saw Tipo II. Se calcularon las secciones eficaces figura (4.4) para determinar cuál de las componentes del triplete escalar tiene mayor probabilidad de producirse en el LHC. Se encuentra como resultado que los bosones doblemente cargados presentan mayores secciones eficaces seguidos de los bosones de Higgs cargados, mientras los bosones de Higgs neutros no contribuyen a estados finales de leptones cargados. Se consideró el proceso Drell-Yan $p, p \rightarrow Z^*, A^* \rightarrow H^{\pm\pm}$ en el que una de las componentes (Bosones de Higgs doblemente cargados) del triplete escalar se puede producir en el LHC. Para el caso específico del decaimiento de $H^{\pm\pm}$ a dos leptones se calculó el ancho total de decaimiento, considerando únicamente como partículas finales al electrón y muon debido que el tauón puede decaer leptonicamente y producir electrones y muones menos energéticos. Se simularon las señales para el decaimiento leptónico de $H^{\pm\pm} \rightarrow \ell^\pm \ell^\pm$, en el contexto del LHC, incluyendo el ruido de fondo para procesos del MEE utilizando los mismos cortes cinemáticos, obteniendo señales por encima del ruido que son una evidencia clara de la posibilidad producir y detectar bosones de Higgs doblemente cargados en el LHC. En nuestro análisis hemos presentado los resultados en términos del número de eventos que corresponde a la sección eficaz multiplicada por la luminosidad integrada. Se grafican las señales de masa invariante para una masa de Higgs de 200 GeV, 300 GeV y 800 GeV figuras (4.5)-(4.10) . Puesto que el acoplamiento de Yukawa entre leptones y Higgs depende de la matriz

de mezcla PMNS de neutrinos, se realiza el estudio para las dos jerarquías típicas entre masas de neutrinos: normal e inversa. Para ambas jerarquías, se obtienen señales positivas de una posible detección de bosones de Higgs doblemente cargados en el LHC, siendo mayor para la inversa.

El background obtenido se redujo apreciablemente gracias a los cortes cinemáticos impuestos. Sin embargo hay que tener en cuenta que en este trabajo solamente se consideraron interacciones puramente electrodébiles, ignorando procesos de hadronización, los cuales inducirían un background adicional apreciable y que no puede reducirse por medio de cortes cinemáticos. El proceso de hadronización es posible de implementar dentro de un generador del tipo calcHEP, por ejemplo implementando una interfase al programa PYTHIA, lo cual se pretende realizar en el futuro. Adicionalmente se consideró una eficiencia de detección perfecta. En la práctica los detectores tienen una eficiencia de detección limitada que depende del rango de energías de las partículas producidas, y lo cual puede ser simulado.

Apéndice A

Grupos y Teoría de la Representación

Los conceptos de simetría han resultado una herramienta muy poderosa para la construcción de modelos que describen de forma exitosa una gran variedad de fenómenos, que abarca temas desde la materia condensada y la física nuclear, hasta la física de partículas y la cosmología. Es así que los modelos de partículas elementales están soportados por argumentos de simetrías presentes en las partículas a nivel fundamental, las cuales permiten incorporar de manera natural las interacciones y, por un procedimiento metódico, las masas de las partículas. Formalmente, la presencia de simetrías en la naturaleza se estudia por medio de la teoría de grupos. En este Anexo se introducen los conceptos básicos de los grupos y de sus representaciones, que posteriormente serán relevantes en la construcción de cualquier modelo de gauge [23].

A.1. Generalidades

Se define un grupo como un conjunto $G = a, b, c, \dots$ con una ley de multiplicación (regla de composición) que presenta las siguientes propiedades [19, 20, 23]:

1. Cerrado: Si a y $b \in G$, $\Rightarrow c = a \cdot b$ también $\in G$.
2. Asociativo: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\forall a, b, c \in G$.

3. Identidad: Existe un elemento $I \in G$ tal que $a \cdot I = I \cdot a = a, \forall a \in G$.
4. Inverso: Existe un elemento $a^{-1} \in G$ tal ue $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = I, \forall a \in G$

Si además el producto es conmutativo ($a \cdot b = b \cdot a \forall a, b \in G$), el grupo es **abeliano**. En general se considerarán grupos **no abelianos**. El número de elementos de G define el orden del grupo, el cual puede ser infinito. Aun más, los elementos pueden tomar valores continuos y no necesariamente discretos. Un tipo de operación importante entre grupos distintos es el isomorfismo: se dice que dos grupos $G = \{a, b, c, \dots\}$ y $G' = \{a', b', c', \dots\}$ son **Isomorfos** si existe una transformación biyectiva entre elementos de cada grupo tal que el producto definido en los grupos transformen también de forma biyectiva, esto es, que existe f biyectiva con:

$$f : G \rightarrow G'$$

$$a \rightsquigarrow a' = f(a) \forall a \in G, a' \in G'$$

$$b \rightsquigarrow b' = f(b) \forall b \in G, b' \in G'$$

tal que si $c = a \cdot b \in G$ y $c' = a' \cdot b' \in G'$ entonces:

$$f : G \rightarrow G'$$

$$c \rightsquigarrow c' = f(c) = f(a) \cdot f(b).$$

En otras palabras, existe la transformación f que preserva la multiplicación de cada grupo. Un grupo de particular interés en física son los grupos de Lie unitarios. Un grupo unitario es aquel cuyos elementos cumplen con $a \cdot a^\dagger = I$, o lo que es lo mismo, que el elemento inverso coincide con el adjunto ($a^{-1} = a^\dagger$). Un grupo de Lie es un grupo continuo que cumple con las siguientes propiedades [20, 19]:

1. Cada elemento del grupo está caracterizado por parámetros continuos:
 $G = \{a(\vec{\theta}) / \vec{\theta} \text{ continuo}\}$, donde en general $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_2, \dots\}$
2. El producto entre dos elementos de G se puede considerar como una transformación en el espacio definido por los parámetros en si mismo:

si $a(\vec{\theta}) \cdot a(\vec{\theta}) = a(\vec{\xi})$, \Rightarrow en el espacio definido por los parámetros, este producto es una transformación $f : (\vec{\theta}, \vec{\phi}) \rightarrow \vec{\xi} = \vec{f}(\vec{\theta}, \vec{\phi})$, siendo esta una función analítica y que cumple con las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}\vec{f}(0, \vec{\phi}) &= \vec{f}(\vec{\phi}, 0) = \vec{\phi} \\ \vec{f}(\vec{\theta}, \vec{f}(\vec{\phi}, \vec{\xi})) &= \vec{f}(\vec{f}(\vec{\theta}, \vec{\phi}), \vec{\xi})\end{aligned}$$

3. Si el grupo de Lie es unitario, cada elemento puede escribirse como [20]:

$$a(\vec{\theta}) = e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{G}} \quad (\text{A.1})$$

donde \vec{T} genera los elementos del grupo a través de variaciones en $\vec{\theta}$ [22]:

$$i \frac{\partial a}{\partial \theta_i} \big|_{\theta_i=0} = G_i,$$

razón por la cual a \vec{G} se le conoce como los **generadores** del grupo. Es de notar que el número de generadores (número de componentes de \vec{T}) coincide con la dimensión del espacio de los parámetros $\vec{\theta}$.

4. El hecho de que el grupo sea unitario, lleva a que los generadores sean hermiticos y los parámetros reales [20].
5. A partir de las propiedades anteriores, y teniendo en cuenta que en general el grupo no es abeliano, se puede deducir las relaciones de conmutación de los generadores, lo que se conoce como el **álgebra de Lie** [20]:

$$[G_i, G_j] = i \sum_k C_{ijk} G_k, \quad (\text{A.2})$$

donde los coeficientes C_{ijk} corresponden a las constantes de estructura.

Finalmente, es posible definir el **producto directo** entre dos grupos $G = \{a, b, c, \dots\}$ y $G' = \{a', b', c', \dots\}$ como [20]:

$$G \otimes G' = \{a \cdot a' \mid \forall a \in G, a' \in G'\},$$

si los elementos $a \in G$ y $a' \in G'$ conmutan entre sí y cumplen con la regla de multiplicación $(aa') \cdot (bb') = (ab) \cdot (a'b')$.

A.2. Representación

La representación de un grupo abstracto $G = \{a, b, c, \dots\}$ es un isomorfismo entre los elementos de G y un conjunto de matrices $D = D(a), D(b), D(c), \dots$. La representación mantiene las mismas propiedades que el grupo abstracto, entre otras se preserva la forma unitaria en (A.1) y el álgebra en (A.2) [20, 19]:

$$D(a(\vec{\theta})) = e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{T}} \quad (\text{A.3})$$

$$[T_i, T_j] = i \sum_k C_{ijk} T_k, \quad (\text{A.4})$$

donde $\vec{T} = T(\vec{G})$ es la representación matricial de los generadores abstractos \vec{G} . De esta manera el estudio de un grupo se puede hacer a través de su representación. De hecho el estudio es posible hacerlo sobre un conjunto de vectores base sobre los cuales actúan los elementos del grupo o de su representación [20]:

$$a(\vec{\theta})\psi_{mi} = \sum_j D_{ij}(a)\psi_{mj} \quad (\text{A.5})$$

Es de notar que la dimensión de la representación (cuyas componentes se marcan con ij en (A.5)) corresponde a la dimensión del espacio vectorial generado por la base $\vec{\psi}_m$. En resumen, el estudio de un grupo se puede hacer según las propiedades presentes en la representación de sus elementos, en la representación de sus generadores o en el conjunto de estados base sobre el que actúa el grupo, tal como se representa en el la figura (A.1).

En la construcción de los modelos de partículas elementales, se referirá a la representación según el punto de vista de cómo actúan los elementos

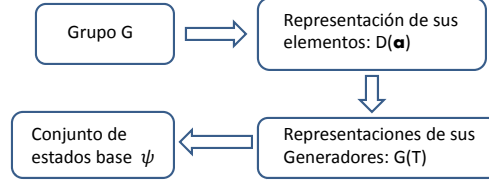


Figura A.1: Representación Grupo

del grupo sobre los estados definidos por $\vec{\psi}$, como indica (A.5). Con esta última anotación, se dice que una representación ψ es **reducible** a las bases $\{\psi_1\}, \{\psi_2\}, \dots, \{\psi_i\}, \{\psi_j\}, \dots$ si el conjunto $\{\psi\}$, contiene subconjuntos $\{\{\psi_1\}, \{\psi_2\}, \dots, \{\psi_i\}, \{\psi_j\}\}$ que no pueden ser “conectados” entre sí por medio de una transformación lineal T , esto es que no existe T tal que $T\{\psi_i\} = \{\psi_j\}$. Si existe tal transformación que conecte subconjuntos, la representación es **irreducible**. Un grupo abstracto puede tener varias representaciones que pueden o no ser reducibles. Un caso especial es la representación irreducible con dimensión más pequeñas, conocida como la **representación fundamental** del grupo, recordando que la dimensión de la representación es la dimensión del espacio de estados $\{\psi_j\}$.

A.3. El grupo SU(n)

Se define el grupo $U(n)$ a través de su representación fundamental (por lo que a esta también se le conoce como la representación **definitoria**), correspondiente a matrices de dimensión $n \times n$ unitarias [9, 20, 19]:

$$U = e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{T}},$$

siendo \vec{T} el conjunto de generadores que son también matrices $n \times n$. Una de las propiedades de las transformaciones unitarias es que su determinante es $\det(U) = e^{i\gamma}$ con γ real. El caso con $\gamma = 0$, es decir con $\det(U) = 1$, define a los grupos unitarios especiales $SU(n)$, donde los generadores son matrices de traza nula [19, 20, 23]. El hecho de que se tome determinante uno, hace que la representación fundamental de $SU(n)$ se construya con $n^2 - 1$ generadores, de los cuales $n - 1$ son diagonales y mutuamente conmutantes, por lo que los elementos del grupo se escriben como [19, 20, 23]:

$$U = e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{T}} = e^{-i\sum_{i=1}^{n^2-1} \theta_i T_i}, \quad (\text{A.6})$$

donde los generadores cumplen con el álgebra de Lie dada por (A.4). Este grupo puede tener otros tipos de representaciones que se definen según la forma en que transforma una base, cuya dimensión determinará la de la representación.

A.3.1. Representación n

Se considera $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_1, \dots, \psi_i, \dots, \psi_n)$ una base de un espacio vectorial de dimensión n . Se dice que $\vec{\psi}$ transforma según n bajo $SU(n)$ si [19, 20, 23]:

$$\vec{\psi}' = U \vec{\psi} = e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{T}} \vec{\psi}, \quad (\text{A.7})$$

o en componentes (notación tensorial):

$$\psi^{i'} = U_j^i \psi^j = e^{-i\theta^\alpha (T_\alpha)_j^i} \psi^j, \quad (\text{A.8})$$

con $i, j = 1, 2, \dots, n$ y $\alpha = 1, 2, \dots, n^2 - 1$, recordando que índices repetidos se suman. Se observa que $\dim(\vec{\psi}) = n$, por lo que $\dim(T_\alpha) = n \times n$, definiendo así la representación fundamental con $n^2 - 1$ generadores T_α . Para transformaciones $SU(n)$ infinitesimales, se tiene lo siguiente:

$$\psi^{i'} = [\delta_j^i - i(T_\alpha)_j^i (\delta\theta^\alpha)] \psi^j, \quad (\text{A.9})$$

donde δ_j^i es el delta de Kronecker y $\delta\theta$ el parámetro infinitesimal.

A.3.2. Representación n^* (conjugada)

Se puede considerar también la base fundamental anterior, pero compleja conjugada $\vec{\psi}^* = (\psi_1^*, \psi_1^*, \dots, \psi_i^*, \dots, \psi_n^*)$ de dimensión n . Se dice que $\vec{\psi}^*$ transforma según n^* bajo $SU(n)$ si se toma el complejo conjugado de (A.8):

$$(\psi^{i'})^* = \left(e^{-i\theta^\alpha (T_\alpha)_j^i} \psi^j \right)^*, \quad (\text{A.10})$$

que al usar la notación $(\psi^i)^* = \psi_i$ y $((T_\alpha)_j^i)^* = (T_\alpha)_i^j$ [13, 20, 19], se escribe de forma infinitesimal como:

$$\psi'_i = [\delta_i^j - i(-T_\alpha)_i^j(\delta\theta^\alpha)] \psi_j, \quad (\text{A.11})$$

relación que define la representación conjugada con generadores $-(T_\alpha)_i^j$.

A.3.3. Representación $n \otimes n$

Se considera como base al tensor ψ^{ij} con n^2 componentes, y que transforma igual que el producto de dos bases fundamentales [9, 15, 22, 24], esto es, que ψ^{ij} transforma según $n \otimes n$ bajo $SU(n)$ si:

$$\psi^{ij'} = U_k^i U_l^j \psi^{kl} = e^{-i\theta^\alpha (T_\alpha)_k^i} e^{-i\theta^\alpha (T_\alpha)_l^j} \psi^{kl}, \quad (\text{A.12})$$

o infinitesimalmente (manteniendo sólo términos lineales):

$$\psi^{ij'} = \psi^{ij} - i [(T_\alpha)_k^i \delta_l^j + \delta_k^i (T_\alpha)_l^j] (\delta\theta^\alpha) \psi^{kl}, \quad (\text{A.13})$$

definiendo así una representación con generadores $(T_\alpha)_{kl}^{ij} = (T_\alpha)_k^i \delta_l^j + \delta_k^i (T_\alpha)_l^j$.

A.3.4. Representación $n^* \otimes n^*$

Al igual que con n^* , se puede tener la representación conjugada a $n \otimes n$ definida por (A.12), de tal forma que ψ_{ij} transforma según $n^* \otimes n^*$ bajo $SU(n)$ si:

$$\psi^{ij'} = e^{i\theta^\alpha (T_\alpha)_i^k} e^{-i\theta^\alpha (T_\alpha)_j^l} \psi_{kl}, \quad (\text{A.14})$$

o infinitesimalmente:

$$\psi'_{ij} = \psi_{ij} - i [-(T_\alpha)_i^k \delta_j^l + \delta_i^k (T_\alpha)_j^l] (\delta\theta^\alpha) \psi_{kl}, \quad (\text{A.15})$$

definiendo así la representación $n^* \otimes n^*$ con generadores $-(T_\alpha)_{ij}^{kl} = -(T_\alpha)_i^k \delta_j^l - \delta_i^k (T_\alpha)_j^l$.

A.3.5. Representación $n \otimes n^*$

Se pueden combinar las bases n y conjugada n^* para construir la base ψ_j^i , que transforma según $n \otimes n^*$ bajo $SU(n)$ si:

$$\psi_j^{i'} = e^{-i\theta^\alpha (T_\alpha)_k^i} e^{i\theta^\alpha (T_\alpha)_j^l} \psi_l^k, \quad (\text{A.16})$$

o infinitesimalmente:

$$\psi_j^{i'} = \psi_j^i - i [(T_\alpha)_k^i \delta_j^l - \delta_k^i (T_\alpha)_j^l] (\delta\theta^\alpha) \psi_l^k, \quad (\text{A.17})$$

definiendo así la representación con generadores $(T_\alpha)_{kj}^{il} = (T_\alpha)_k^i \delta_j^l - \delta_k^i (T_\alpha)_j^l$.

Las representaciones anteriores del grupo $SU(n)$ son reducibles, a excepción de la fundamental y su conjugada. Esto significa que las bases de las representaciones $n \otimes n$, $n^* \otimes n^*$ y $n \otimes n^*$ se descomponen en subespacios que no se pueden conectar entre sí por transformaciones lineales.

A.3.6. Representaciones irreducibles $n \otimes n$ y $n \otimes n^*$

El operador de permutaciones intercambia el orden de los índices en los tensores y conmuta con el grupo de transformaciones $SU(n)$ [19, 20]. Se considera el caso de ψ^{ij} , el cual se puede escribir como:

$$\psi^{ij} = \frac{1}{2}(\psi^{ij} + \psi^{ji}) + \frac{1}{2}(\psi^{ij} - \psi^{ji}).$$

Llamando $S^{ij} = \frac{1}{2}(\psi^{ij} + \psi^{ji})$ y $A^{ij} = \frac{1}{2}(\psi^{ij} - \psi^{ji})$, se tiene la descomposición:

$$\psi^{ij} = S^{ij} + A^{ij} \quad (\text{A.18})$$

Esa descomposición de la base corresponde a estados propios del operador permutación. Efectivamente se observa que:

$$\begin{aligned} PS^{ij} &= S^{ji} = \frac{1}{2}(\psi^{ji} + \psi^{ij}) = S^{ij} \\ PA^{ij} &= A^{ji} = \frac{1}{2}(\psi^{ji} - \psi^{ij}) = -A^{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

S^{ij} es la representación simétrica del operador de permutaciones, y A^{ij} su representación antisimétrica, las cuales no se pueden relacionar entre sí por

una transformación lineal [19, 20]. Es así que la base de la representación $n \otimes n$ de $SU(n)$ en (A.18), se expresa como dos subconjuntos irreducibles que son también representaciones del operador permutación. Las representaciones irreducibles S^{ij} y A^{ij} transforman, bajo $SU(n)$, igual que ψ^{ij} indicado en (A.12) y (A.13), pero con las propiedades dadas en (A.19). De forma completamente análoga, se descompone la base $n^* \otimes n^*$:

$$\psi_{ij} = S_{ij} + A_{ij}$$

Es de notar que las condiciones (A.19) reducen el número de elementos independientes. Mientras ψ^{ij} tienen n^2 elementos, la base S^{ij} repite elementos no diagonales con $S^{ij} = S^{ji}$, reduciendo su cantidad a la mitad, esto es $n^2 - n/2 + n = n(n+1)/2$ elementos. La base A^{ij} cumple con $S^{ij} = -S^{ji}$, por lo que no solamente se reduce a la mitad los elementos no diagonales, sino que además los elementos diagonales deben ser cero, teniendo un total de $n^2 - n/2 = n(n-1)/2$ elementos. Así la representación $n \otimes n$ se separa en:

$$\begin{aligned} \psi^{ij} &= S^{ij} + A^{ij}, \\ n \otimes n &= \frac{n(n+1)}{2} \oplus \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

A.3.7. Representación irreducible $n \otimes n^*$ la representación adjunta

Una base que transforma según $n \otimes n^*$ es irreducible si su traza es nula [20]. Considere la representación ψ_j^i con traza nula es (es reducible):

$$Tr(\psi) = \psi_1^1 + \psi_2^2 + \dots + \psi_n^n \neq 0$$

Se introduce una matriz $D_{x \times x}$ proporcional a la identidad ($D = xI$), cuya traza coincide con la de ψ , esto es:

$$Tr(\psi) - Tr(D) = Tr(\psi) - nx = 0 \Rightarrow \frac{1}{n}Tr(\psi) = x \quad (\text{A.21})$$

A partir de esto se construye la base $\phi_j^i = \psi_j^i - D = \psi_j^i - \delta_j^i$ que de (A.20) toma la forma:

$$\phi_j^i = \psi_j^i - \frac{1}{n} \text{Tr}(\psi) \delta_j^i \quad (\text{A.22})$$

y cuya traza evidentemente es cero. Es así que la representación $n \times n^*$ se reduce a una representación irreducible de la forma dada por (A.21), el cual se reescribe como:

$$\psi_j^i = \phi_j^i + \frac{1}{n} \text{Tr}(\psi) \delta_j^i \quad (\text{A.23})$$

donde

$$\text{Tr}(\phi_j^i) = 0 \quad (\text{A.24})$$

La representación irreducible ψ_j^i se conoce como la representación adjunta y transforma igual que ϕ_j^i según indican (A.16) y (A.17), pero con la condición (A.23). Al igual que sucedía con (A.19), la representación adjunta reduce el número de componentes independientes. La suma en (A.23) relaciona un elemento diagonal con las demás, por lo que se tendrán $n^2 - 1$ elementos, mientras que el término $\frac{1}{n} \text{Tr}(\psi)$ en (A.22) es un único elemento que forma un singlete. Así la representación $n \otimes n^*$ se separa como:

$$n \otimes n^* = (n^2 - 1) \oplus (n^2 + 1) \quad (\text{A.25})$$

A.4. Grupo SU(n) en teoría cuántica de campos

Los vectores base de las representaciones son en general funciones de onda, correspondientes a los estados de algún sistema cuántico o incluso a campos clásicos. Se tiene así, por ejemplo para la representación n , que esas funciones transforman bajo $SU(n)$ según la relación (A.8). En forma de kets, esos estados transforman igualmente bajo un grupo $SU(n)$ cuyos elementos son operadores abstractos $\hat{u} = e^{-i\theta \cdot \hat{T}}$ [25]:

$$|\alpha'\rangle = \hat{u}|\alpha\rangle \quad (\text{A.26})$$

Al hacer segunda cuantización, los campos ψ pasan a ser operadores $\widehat{\psi}$, y la regla de transformación se define igual que en (A.8) (para el caso n) pero sobre los elementos matriciales del operador de campo $\widehat{\psi}$:

$$\langle \beta' | \widehat{\psi}^i | \alpha' \rangle = U_j^i \langle \beta | \widehat{\psi}^i | \alpha \rangle = e^{-i\theta^\alpha (T_\alpha)_j^i} \langle \beta | \widehat{\psi}^i | \alpha \rangle,$$

el cual al aplicar (A.24), toma la forma:

$$\langle \beta | \widehat{u}^{-1} \widehat{\psi}^i \widehat{u} | \alpha' \rangle = e^{-i\theta^\alpha (T_\alpha)_j^i} \langle \beta | \widehat{\psi}^i | \alpha \rangle,$$

esto es :

$$e^{i\theta^\alpha (\widehat{T}_\alpha)} \widehat{\psi}^i e^{-i\theta^\alpha (\widehat{T}_\alpha)} = e^{-i\theta^\alpha (\widehat{G}_\alpha)_j^i} \widehat{\psi}^j$$

Al considerar parámetros infinitesimales $\delta\theta$, se concluye de la expresión anterior que el campo $\widehat{\psi}^i$ transforma según n si:

$$[\widehat{T}_\alpha, \widehat{\psi}^i] = -(T_\alpha)_j^i \widehat{\psi}^j \quad (\text{A.27})$$

Así que el generador abstracto \widehat{T}_α , se representa como matrices T_α de dimensión $n \times n$ correspondiente a la representación fundamental definida en (A.6). De forma completamente análoga, se obtienen las demás representaciones:

ψ transforma según n^* si :

$$[\widehat{T}_\alpha, \widehat{\psi}^i] = -[(-T_\alpha)_j^i] \widehat{\psi}^j \quad (\text{A.28})$$

$\widehat{\psi}^{ij}$ transforma según $n^* \otimes n$ si :

$$[\widehat{T}_\alpha, \widehat{\psi}^{ij}] = -[(T_\alpha)_k^i \delta_l^j + \delta_k^i (T_\alpha)_l^j] \widehat{\psi}^{kl} \quad (\text{A.29})$$

$\widehat{\psi}_{ij}$ transforma según $n^* \otimes n^*$ si :

$$[\widehat{T}_\alpha, \widehat{\psi}_{ij}] = -[-(T_\alpha)_i^k \delta_j^l + \delta_i^k (T_\alpha)_j^l] \widehat{\psi}_{kl} \quad (\text{A.30})$$

$\widehat{\psi}_j^i$ transforma según $n \otimes n^*$ si :

$$[\widehat{T}_\alpha, \widehat{\psi}_j^i] = -[(T_\alpha)_k^i \delta_j^l - \delta_k^i (T_\alpha)_j^l] \widehat{\psi}_l^k \quad (\text{A.31})$$

En adición a todas las representaciones anteriores, cabe mencionar el caso en que la base sea un escalar. Por definición, $\hat{\psi}$ es un escalar $SU(n)$ si es invariante bajo las transformaciones $SU(n)$, es decir que cumple con el siguiente conmutador [20, 23]:

$$[\hat{T}_\alpha, \hat{\psi}] = 0 \quad (\text{A.32})$$

Ejemplos de escalares $SU(n)$ son el delta de Kronecker δ_j^i , el tensor de Levi-Civita $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk}$ y en general tensores de rango cero. Un caso especial de escalares son los formados por productos de bases de rangos superiores, tal que los índices se contraigan completamente:

$$\begin{aligned} [\hat{T}_\alpha, \hat{\psi}^i \hat{\psi}_i] &= 0, & [\hat{T}_\alpha, \hat{\psi}^{ij} \hat{\psi}_{ij}] &= 0 \\ [\hat{T}_\alpha, \hat{\psi}_j^i \hat{\psi}_i^j] &= 0, & [\hat{T}_\alpha, \hat{\psi}^{ijk} \hat{\psi}_{ijk}] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

A.5. La derivada covariante

Las transformaciones de gauge surgen al considerar a los parámetros de las transformaciones $SU(n)$ dependientes del espacio-tiempo, lo que se conocen como transformaciones locales. De esta manera se considerará el grupo $SU(n)$ local al tomar $\vec{\theta} = \theta(x_\mu)$ en (A.6). Los modelos de gauge corresponden a teorías donde las ecuaciones de movimiento son invariantes bajo el grupo de transformaciones $SU(n)$ locales. Sin embargo para que eso sea así, son necesarios términos adicionales que contengan campos vectoriales A_μ (conocidos como campos de gauge) además de los campos ψ . Dichos términos se interpretan directamente como interacciones mediadas por los campos A_μ , introduciendo así de manera natural las fuerzas entre partículas [20, 23]. Tales teorías surgen incluso a nivel de la electrodinámica clásica, donde las partículas cargadas interactúan con los campos electromagnéticos a través de los potenciales (ϕ, \vec{A}) . En este caso el Hamiltoniano de una partícula de masa m y carga e en un campo electromagnético toma la siguiente forma:

$$H = \frac{\left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A}\right)^2}{2m} + e\phi$$

de donde las ecuaciones de movimiento se obtienen al aplicar las ecuaciones de Hamilton. El momento canónico \vec{P} NO es el momento lineal usual $\vec{p} = m\vec{r}'$

de la partícula, sino la suma $\vec{P} - \frac{\epsilon}{c} \vec{A}$ [23]. En general para una teoría invariante local $SU(n)$, son necesarios tantos campos vectoriales $A_\mu = (\phi, \vec{A})$ como generadores tenga el grupo (es decir $n^2 - 1$ campos), tal que se tendrán términos adicionales de la forma $\vec{A}_\mu \cdot \vec{T}$, siendo $\vec{A}_\mu = ((\vec{A}_\mu)_1, (\vec{A}_\mu)_2, \dots, (\vec{A}_\mu)_{n^2-1})$ y \hat{T} los generadores abstractos. En analogía con el caso clásico, se define el momento canónico como [13, 22]:

$$\hat{\mathcal{D}} = \hat{p} + g \hat{A} \cdot \vec{T} \quad (\text{A.34})$$

donde el operador con slash indica el producto con las matrices de Dirac que son necesarias para una teoría invariante relativista: $\hat{\mathcal{O}} = \hat{O}_\mu \gamma^\mu$. Formalmente, el operador momento pertenece a un grupo de transformaciones que originan las traslaciones de las partículas por el cuadri-espacio, en el cual \hat{p} corresponde al generador abstracto de dichas traslaciones [25]. La representación en coordenadas de tales generadores sobre una base $\hat{\psi}$ (en cualquier representación $SU(n)$) se encuentra que [20],

$$[i\hat{\mathcal{D}}, \hat{\psi}] = \hat{\mathcal{D}}\hat{\psi}, \quad (\text{A.35})$$

esto es que las derivadas $\hat{\mathcal{D}}$ originan el movimiento traslacional por el espacio-tiempo (cinemática), pero lo hace de forma tal que la invarianza relativista (covarianza Lorentz) se mantenga. Sin embargo, dicha cinemática NO preserva la invarianza del grupo local $SU(n)$ por el hecho de que el momento canónico NO es \hat{p} , según indica (A.34). Como consecuencia de eso, las derivadas $\hat{\mathcal{D}}$ ya no serán las representaciones del momento canónico, sino serán otras que dependen de la representación de los campos $\hat{\psi}$ sobre los que actúa (esto es así ya, que la representación del momento $\hat{\mathcal{P}}$ depende de la representación de los generadores \hat{T} según la forma (A.34)). A dichas representaciones de los momentos canónicos $\hat{\mathcal{D}}$ es lo que se conocen como las derivadas covariantes $\hat{\mathcal{D}}$, las cuales originarán traslaciones espacio-temporales no solamente manteniendo la covarianza Lorentz, sino además la covarianza local $SU(n)$ [22].

A.5.1. Representación n

Se considera el momento canónico dado en (A.34) actuando sobre la base de la representación:

$$\left[i\tilde{\mathcal{D}}, \hat{\psi}^i \right] = \left[i\tilde{\mathcal{P}}, \hat{\psi}^i \right] + ig\tilde{\mathcal{A}} \cdot \left[\vec{T}, \hat{\psi}^i \right]$$

utilizando (A.33) y (A.25)

$$\left[i\mathcal{D} - ig\tilde{\mathcal{A}} \cdot \vec{T}_j^i \right] \hat{\psi}^i = \mathcal{D}_j^i \hat{\psi}^i.$$

luego la derivada covariante en la representación n es:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D} - ig\tilde{\mathcal{A}} \cdot \vec{G} \quad (\text{A.36})$$

A.5.2. Representación n^*

procediendo de la misma forma pero sobre la base de la representación n^* :

$$\left[i\tilde{\mathcal{D}}, \hat{\psi}_i \right] = \left[i\tilde{\mathcal{P}}, \hat{\psi}_i \right] + ig\tilde{\mathcal{A}} \cdot \left[\vec{T}, \hat{\psi}_i \right]$$

con (A.26) y (A.33) la derivada covariante en la representación n^* es:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D} - ig\tilde{\mathcal{A}} \cdot \vec{G} \quad (\text{A.37})$$

A.5.3. Representación $n \otimes n$

$$\left[i\tilde{\mathcal{D}}, \hat{\psi}^{ij} \right] = \left[i\tilde{\mathcal{P}}, \hat{\psi}^{ij} \right] + ig\tilde{\mathcal{A}} \cdot \left[\vec{T}, \hat{\psi}^{ij} \right]$$

con (A.27) y (A.33) la derivada covariante en la representación $n \otimes n$ es:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D} - ig\tilde{\mathcal{A}} \cdot \left[\vec{T} \otimes I \oplus I \otimes \vec{T} \right] \quad (\text{A.38})$$

A.5.4. Representación $n^* \otimes n^*$

$$\left[i\tilde{\mathcal{D}}, \hat{\psi}_{ij} \right] = \left[i\tilde{\mathcal{P}}, \hat{\psi}_{ij} \right] + ig\tilde{\mathcal{A}} \cdot \left[\vec{T}, \hat{\psi}_{ij} \right]$$

con (A.28) y (A.33) la derivada covariante en la representación $n^* \otimes n^*$ es:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D} \delta_i^k \delta_j^l + ig\tilde{\mathcal{A}} \cdot \left[\vec{T} \otimes I \oplus I \otimes \vec{T} \right] \quad (\text{A.39})$$

A.5.5. Representación $n \otimes n^*$

$$[i\vec{D}, \hat{\psi}_j^i] = [i\vec{p}, \hat{\psi}_j^i] + ig\vec{A} \cdot [\vec{T}, \hat{\psi}_j^i]$$

con (A.29) y (A.33) la derivada covariante en la representación $n \otimes n^*$ es:

$$\vec{D} = \partial \delta_i^k \delta_j^l - ig\vec{A} \cdot [\vec{T} \otimes I \oplus (-I) \otimes \vec{T}] \quad (\text{A.40})$$

A.6. Lagrangianos fermiónicos

Las ecuaciones de movimiento se pueden obtener a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange, las cuales son ecuaciones sobre la densidad lagrangiana que contiene la cinemática e interacciones de las partículas. Los campos fermiónicos se describen a través de la ecuación de Dirac, cuyo lagrangiano es manifestamente invariante relativista e invariante $SU(n)$ local, dando como resultado términos de la forma [23]:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{D}\psi,$$

donde $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, y donde los campos y derivadas covariantes tendrán alguna representación específica. De esta manera se tiene con (A.34) el lagrangiano de Dirac en la representación n [20]:

$$\mathcal{L}_D^{(n)} = i\bar{\psi}_i \not{D} \psi^i + g\bar{\psi}_i \vec{A} \cdot (\vec{T})_j^i \psi^j. \quad (\text{A.41})$$

De (A.35) el lagrangiano en la representación n^* :

$$\mathcal{L}_D^{(n^*)} = i\bar{\psi}^i \not{D} \psi_i - g\bar{\psi}^i \vec{A} \cdot (\vec{T})_i^j \psi_j. \quad (\text{A.42})$$

De (A.36) el lagrangiano en la representación $n \otimes n$:

$$\mathcal{L}_D^{(n \otimes n)} = i\bar{\psi}_{ij} \not{D} \psi^{ij} + g\bar{\psi}_{ij} \vec{A} \cdot [(\vec{T})_k^i \delta_l^j + \delta_k^i (\vec{T})_l^j] \psi^{kl}, \quad (\text{A.43})$$

que tiene la misma forma para las representaciones irreducibles simétricas S_{ij} o antisimétricas A^{ij} . Si en el segundo término de $[(\vec{T})_k^i \delta_l^j + \delta_k^i (\vec{T})_l^j]$ se intercambian los índices i por j y k por l (índices mudos), la expresión (A.41) se puede escribir para representación simétrica o antisimétrica como:

$$\mathcal{L}_{Dsimetrizada}^{(n \otimes n)} = i\bar{\phi}_{ij}\not{\partial}\phi^{ij} + 2g\bar{\phi}_{ij}\vec{\mathcal{A}} \cdot \left[(\vec{T})_k^i\right] \phi^{kj}, \quad (\text{A.44})$$

donde ϕ^{ij} son los estados simetrizados (simétrica S^{ij} o antisimétrica A^{ij}). De (A.37) para la representación $n^* \otimes n^*$:

$$\mathcal{L}_D^{(n^* \otimes n^*)} = i\bar{\psi}^{ij}\not{\partial}\psi_{ij} - g\bar{\psi}^{ij}\vec{\mathcal{A}} \cdot \left[(\vec{T})_i^k\delta_j^l + \delta_i^k(\vec{T})_j^l\right] \psi_{kl}, \quad (\text{A.45})$$

o para los campos simetrizados:

$$\mathcal{L}_{Dsimetrizada}^{(n^* \otimes n^*)} = i\bar{\phi}^{ij}\not{\partial}\phi_{ij} - 2g\bar{\phi}_{ij}\vec{\mathcal{A}} \cdot \left[(\vec{T})_i^k\right] \phi_{kj}, \quad (\text{A.46})$$

finalmente de (A.38) para la representación $n \otimes n^*$:

$$\mathcal{L}_D^{(n \otimes n^*)} = i\bar{\psi}_i^j\not{\partial}\psi_j^i - g\bar{\psi}_i^j\vec{\mathcal{A}} \cdot \left[(\vec{T})_k^i\delta_j^l - \delta_k^i(\vec{T})_j^l\right] \psi_l^k, \quad (\text{A.47})$$

Apéndice B

Sector de Higgs

En este apéndice se detallan algunos cálculos del sector escalar.

B.1. Valores esperados en el vacío y campos

B.1.1. Doblete

Los generadores NO ROTOS:

$$[\widehat{Q}, \langle \phi \rangle^1] = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} + Y_\phi \right) \frac{v_1}{\sqrt{2}} = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$[\widehat{Q}, \langle \phi \rangle^2] = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} + Y_\phi \right) \frac{v_2}{\sqrt{2}} = 0, \quad (\text{B.2})$$

Los generadores ROTOS:

$$[\widehat{T}_1, \langle \phi \rangle^1] = -\frac{v_2}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow v_1 \neq 0, \quad (\text{B.3})$$

ó

$$[\widehat{Q}, \langle \phi \rangle^2] = -\frac{v_1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow v_2 \neq 0, \quad (\text{B.4})$$

\widehat{T}_2 tiene la misma estructura, para \widehat{Q}^\perp :

$$[\widehat{T}_3 - \widehat{Y}, \langle \phi \rangle^1] = \left(-\frac{1}{2} + Y_\phi \right) \frac{v_1}{\sqrt{2}} \neq 0, \quad (\text{B.5})$$

ó

$$[\widehat{T}_3 - \widehat{Y}, \langle \phi \rangle^2] = \left(\frac{1}{2} + Y_\phi \right) \frac{v_2}{\sqrt{2}} \neq 0, \quad (\text{B.6})$$

Para respetar la simetria $U(1)_Y$ los terminos deben ser singletes bajo la hipercarga , de tal forma que:

$$\begin{aligned} [\widehat{Y}, \widehat{\ell}_L^2 \widehat{\ell}_R \langle \phi \rangle_0] &= 0 \Rightarrow Y_\phi = \frac{1}{2} \\ [\widehat{Y}, \widehat{q}_L^2 \widehat{q}_R \langle \phi \rangle_0] &= 0 \Rightarrow Y_\phi = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

como $Y_\phi = \frac{1}{2}$ se reemplaza este valor en (B.1) y (B.2) de tal forma que $v_1 = 0$ y de (B.3) y (B.4) queda $v_2 \neq 0$ y de esta forma se satisface (B.6) entonces el V.E.V para el dobletes es :

$$\langle \phi \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Ahora, se determina el valor de las componenetes de ϕ , teniendo en cuenta que estos valores se calculan sobre el campo y no sobre el V.E.V:

$$[\widehat{Q}, \phi^1] = -(\phi^1) \quad (\text{B.8})$$

$$[\widehat{Q}, \phi^2] = 0 \quad (\text{B.9})$$

entonces:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \phi^0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

para determinar la forma del antidoblete se utiliza ϕ de tal forma que para encontrar $\tilde{\phi}$ se invierte fila y columnas de (B.10), además se conjuga la carga e invierte el signo:

$$\tilde{\phi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

esta expresión es posible escribirla como

$$\tilde{\phi} = i\tau_2\phi^* \quad (\text{B.12})$$

donde τ_2 es la segunda matriz de Pauli

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

B.1.2. Triplete simétrico

Se utilizan las mismas consideraciones del doblete para el triplete simétrico de tal forma que:

Los generadores NO ROTOS:

$$[\hat{Q}, \langle\Delta\rangle^{11}] = 0 \Rightarrow (1 + Y_\Delta)V_1 = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$[\hat{Q}, \langle\Delta\rangle^{22}] = 0 \Rightarrow (1 - Y_\Delta)V_4 = 0 \quad (\text{B.14})$$

$$[\hat{Q}, \langle\Delta\rangle^{12}] = 0 \Rightarrow -Y_\Delta V_2 = 0 \quad (\text{B.15})$$

$$[\hat{Q}, \langle\Delta\rangle^{21}] = 0 \Rightarrow -Y_\Delta V_3 = 0 \quad (\text{B.16})$$

Los generadores ROTOS:

$$[\hat{T}_1, \langle\Delta\rangle^{11}] = -\frac{1}{2}(V_2 + V_3) \neq 0 \quad (\text{B.17})$$

ó

$$[\hat{T}_1, \langle\Delta\rangle^{12}] = -\frac{1}{2}(V_1 - V_4) \neq 0 \quad (\text{B.18})$$

para $\langle\Delta\rangle^{22}$ y $\langle\Delta\rangle^{21}$ se obtiene el mismo resultado (B.17) y (B.18) respectivamente.

$$[\hat{T}_2, \langle\Delta\rangle^{11}] = \frac{i}{2}(V_2 + V_3) \neq 0 \quad (\text{B.19})$$

ó

$$[\hat{T}_2, \langle\Delta\rangle^{12}] = \frac{i}{2}(-V_1 + V_4) \neq 0 \quad (\text{B.20})$$

para $\langle\Delta\rangle^{22}$ y $\langle\Delta\rangle^{21}$ se obtiene el mismo resultado que (B.19) y (B.20) respectivamente. Para Q^\perp :

$$[\widehat{Q}^\perp, \langle \Delta \rangle^{11}] \neq 0 \Rightarrow (-1 + Y_\Delta) \nu_1 \neq 0 \quad (\text{B.21})$$

ó

$$[\widehat{Q}^\perp, \langle \Delta \rangle^{22}] \neq 0 \Rightarrow (1 + Y_\Delta) \nu_4 \neq 0, \quad (\text{B.22})$$

$$[\widehat{Q}^\perp, \langle \Delta \rangle^{12}] \neq 0 \Rightarrow 2Y_\Delta \nu_2 \neq 0, \quad (\text{B.23})$$

ó

$$[\widehat{Q}^\perp, \langle \Delta \rangle^{21}] \neq 0 \Rightarrow 2Y_\Delta \nu_3 \neq 0. \quad (\text{B.24})$$

Para respetar la simetria $U(1)_Y$:

$$[\widehat{Y}_\Delta, \widehat{\ell}_L^1 (\widehat{\ell}_L^1)^c \langle \Delta \rangle] = 0 \Rightarrow Y_\Delta = -1$$

$Y_\Delta = -1$ se sustituye en (B.13) y (B.14) de tal forma que $\nu_4 = 0$ y de (B.15) y (B.16) $\nu_2 = 0$ y $\nu_3 = 0$ de (B.18) $\nu_1 \neq 0$ entonces el V.E.V para el triplete es:

$$\langle \Delta \rangle = \begin{pmatrix} \nu_\Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.25})$$

Para las componentes del campo de Δ :

$$[\widehat{Q}, \Delta^{11}] = 0, \quad (\text{B.26})$$

$$[\widehat{Q}, \Delta^{12}] = -(-1)\phi^{12}, \quad (\text{B.27})$$

$$[\widehat{Q}, \Delta^{21}] = -(-1)\phi^{21}, \quad (\text{B.28})$$

$$[\widehat{Q}, \Delta^{22}] = -(-2)\phi^{22}. \quad (\text{B.29})$$

entonces:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\Delta^0 & \Delta^- \\ \Delta^- & \sqrt{2}\Delta^{--} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.30})$$

se encuentra el triplete normalizado.

Apéndice C

Matrices de masa

C.1. Sector cargado

La matriz $M_{\phi^\pm \Delta^\pm}^2$ (3.10) presenta los siguientes valores propios exactos:

$$\det(M_{\phi^\pm \Delta^\pm}^2 - VP) = \begin{vmatrix} (\alpha_2 \nu_\Delta + 2f) \nu_\Delta - VP & \left(\sqrt{2}f + \frac{\nu_\Delta}{\sqrt{2}} \alpha_2 \right) \nu \\ \left(\sqrt{2}f + \frac{\nu_\Delta}{\sqrt{2}} \alpha_2 \right) \nu & \left(\frac{f}{\nu_\Delta} + \frac{1}{2} \alpha_2 \right) \nu^2 - VP \end{vmatrix} \quad (\text{C.1})$$

$$= VP^2 - VP \left[\alpha_2 \nu_\Delta^2 + 2f \nu_\Delta + \left(\frac{f}{\nu_\Delta} + \frac{1}{2} \alpha_2 \right) \nu^2 \right] = 0 \quad (\text{C.2})$$

De tal forma que:

$$VP_1 = 0; \quad VP_2 = \alpha_2 \nu_\Delta^2 + 2f \nu_\Delta + \left(\frac{f}{\nu_\Delta} + \frac{1}{2} \alpha_2 \right) \nu^2, \quad (\text{C.3})$$

con los valores propios se encuentran los vectores propios, para el valor propio $VP_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} (\alpha_2 \nu_\Delta + 2f) \nu_\Delta & \left(\sqrt{2}f + \frac{\nu_\Delta}{\sqrt{2}} \alpha_2 \right) \nu \\ \left(\sqrt{2}f + \frac{\nu_\Delta}{\sqrt{2}} \alpha_2 \right) \nu & \left(\frac{f}{\nu_\Delta} + \frac{1}{2} \alpha_2 \right) \nu^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{C.4})$$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -\frac{(\alpha_2 \nu_\Delta + 2f) \nu_\Delta}{\left(\sqrt{2}f + \frac{\nu_\Delta}{\sqrt{2}}\alpha_2\right) \nu},$$

el vector propio V_1 es:

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{\nu^2 + 2\nu_\Delta^2}} \begin{pmatrix} \nu \\ -\sqrt{2}\nu_\Delta \end{pmatrix}, \quad (\text{C.5})$$

el procedimiento es análogo para el vector propio V_2 ,

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{\nu^2 + 2\nu_\Delta^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\nu_\Delta \\ \nu \end{pmatrix}, \quad (\text{C.6})$$

si se define:

$$S_\theta = \sin \theta = \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + 2\nu_\Delta^2}}; \quad C_\theta = \cos \theta = \frac{\sqrt{2}\nu_\Delta}{\sqrt{\nu^2 + 2\nu_\Delta^2}},$$

se escribe (C.5) y (C.6) como:

$$V_1 = \begin{pmatrix} S_\theta \\ -C_\theta \end{pmatrix}; \quad V_2 = \begin{pmatrix} C_\theta \\ S_\theta \end{pmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

C.2. Sector neutro

La matriz (3.18) tiene los siguientes valores propios:

$$\begin{aligned} \det(M_{Imag}^2 - VP) &= \begin{bmatrix} 4f\nu_\Delta - VP & 2f\nu \\ 2f\nu & f\frac{\nu^2}{\nu_\Delta} - VP \end{bmatrix}, \\ &= VP^2 - \left(4f\nu_\Delta + f\frac{\nu^2}{\nu_\Delta}\right)VP = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

los valores propios son:

$$VP_1 = 0; \quad VP_2 = \frac{f}{\nu_\Delta} (\nu^2 + 4\nu_\Delta^2) \quad (\text{C.9})$$

de tal forma que los vectores propios son:

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{\nu^2 + 4\nu_\Delta^2}} \begin{pmatrix} 2\nu_\Delta \\ \nu \end{pmatrix}, \quad (\text{C.10})$$

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{\nu^2 + 4\nu_\Delta^2}} \begin{pmatrix} -\nu \\ 2\nu_\Delta \end{pmatrix}, \quad (\text{C.11})$$

defiendo:

$$S_{\theta_2} = \sin \theta_2 = \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + 4\nu_\Delta^2}}; \quad C_{\theta_2} = \cos \theta_2 = \frac{2\nu_\Delta}{\sqrt{\nu^2 + 4\nu_\Delta^2}}, \quad (\text{C.12})$$

(C.10) y (C.11) se escriben como:

$$V_1 = \begin{pmatrix} C_{\theta_2} \\ S_{\theta_2} \end{pmatrix}; \quad V_2 = \begin{pmatrix} -S_{\theta_2} \\ C_{\theta_2} \end{pmatrix} \quad (\text{C.13})$$

C.3. Sector real

Para la matriz (3.19), se obtiene los siguientes valores propios con ayuda de MatLab:

$$\begin{aligned} VP_{1/2} = \frac{1}{2\nu_\Delta} \left[2\lambda_1\nu^2\nu_\Delta + 8\lambda_\Sigma\nu_\Delta^3 + f\nu^2 \pm f\nu^2 \left(1 + \frac{4\lambda_1^2\nu_\Delta^2}{f^2} - \frac{32\lambda_1\lambda_\Sigma\nu_\Delta^4}{f^2\nu^2} - \frac{4\lambda_1\nu_\Delta}{f} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{64\lambda_\Sigma\nu_\Delta^6}{f^2\nu^4} + \frac{16\lambda_\Sigma\nu_\Delta^3}{f\nu^2} + \frac{16\nu_\Delta^2}{\nu^2} - \frac{32\Sigma_\lambda\nu_\Delta^3}{f\nu^2} + \frac{16\Sigma_\lambda^2\nu_\Delta^4}{f^2\nu^2} \right)^{1/2} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

con $\lambda_\Sigma = \lambda_2 + \lambda_4$ y $\Sigma_\lambda = \lambda_7 + \lambda_9$. De la aproximación $\nu_\Delta \ll \nu$, resulta:

$$\begin{aligned} VP_{1/2} = \frac{1}{2\nu_\Delta} \left[2\lambda_1\nu^2\nu_\Delta + 8\lambda_\Sigma\nu_\Delta^3 + f\nu^2 \pm f\nu^2 \left(1 + 2\lambda_1^2\frac{\nu_\Delta^2}{f^2} - 16\lambda_1\lambda_\Sigma\frac{\nu_\Delta^4}{f^2\nu^2} - 2\lambda_1\frac{\nu_\Delta}{f} \right. \right. \\ \left. \left. + 32\lambda_\Sigma^2\frac{\nu_\Delta^6}{f^2\nu^4} + 8\lambda_\Sigma\frac{\nu_\Delta^3}{f\nu^2} + 8\frac{\nu_\Delta^2}{\nu^2} - 16\frac{\Sigma_\lambda\nu_\Delta^3}{f\nu^2} + \frac{8\Sigma_\lambda^2\nu_\Delta^4}{f^2\nu^2} - \dots \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

despreciando los términos ν_Δ/ν en todos los ordenes por ser muy pequeños comparados con ν^2/ν_Δ :

$$VP_{1/2} \simeq \lambda_1 \nu^2 [1] + \frac{f\nu^2}{2\nu_\Delta} \pm \frac{f\nu^2}{2\nu_\Delta}, \quad (\text{C.16})$$

los dos valores propios son:

$$VP_1 \simeq f \frac{\nu^2}{\nu_\Delta}; \quad VP_2 \simeq \lambda_1 \nu^2. \quad (\text{C.17})$$

Se calculan los vectores propios con MatLab se utiliza la aproximación anterior y se ortonormaliza de tal forma que se obtienen los siguientes vectores propios:

$$V_1 = \begin{pmatrix} C_{\theta_3} \\ S_{\theta_3} \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} -S_{\theta_3} \\ C_{\theta_3} \end{pmatrix} \quad (\text{C.18})$$

con:

$$S_{\theta_3} = \frac{N_2 \sqrt{1 - N^2} \left[\sqrt{1 - N_1^2} + N_1/N_2 \sqrt{1 - N_2^2} \right]}{\sqrt{1 - 2N_1N_2 - 1/N_1N_2 + N_2/N_1 + N_1/N_2 - 2\sqrt{(1 - N_1^2)(1 - N_2^2)}}}, \quad (\text{C.19})$$

$$C_{\theta_3} = \frac{N_2 \sqrt{1 - N^2}}{\sqrt{1 - 2N_1N_2 - 1/N_1N_2 + N_2/N_1 + N_1/N_2 - 2\sqrt{(1 - N_1^2)(1 - N_2^2)}}}, \quad (\text{C.20})$$

y con:

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + n^2 \left(2\lambda_1 \nu^2 - f \frac{\nu^2}{\nu_\Delta} \right)^2}} \quad (\text{C.21})$$

$$N_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + n^2 (2\lambda_1 \nu^2 - \lambda_1 \nu^2)^2}} \quad (\text{C.22})$$

$$\text{y } n = \frac{1}{2\nu(f - \Sigma_\lambda \nu_\Delta)}.$$

Apéndice D

Reglas de Feynman

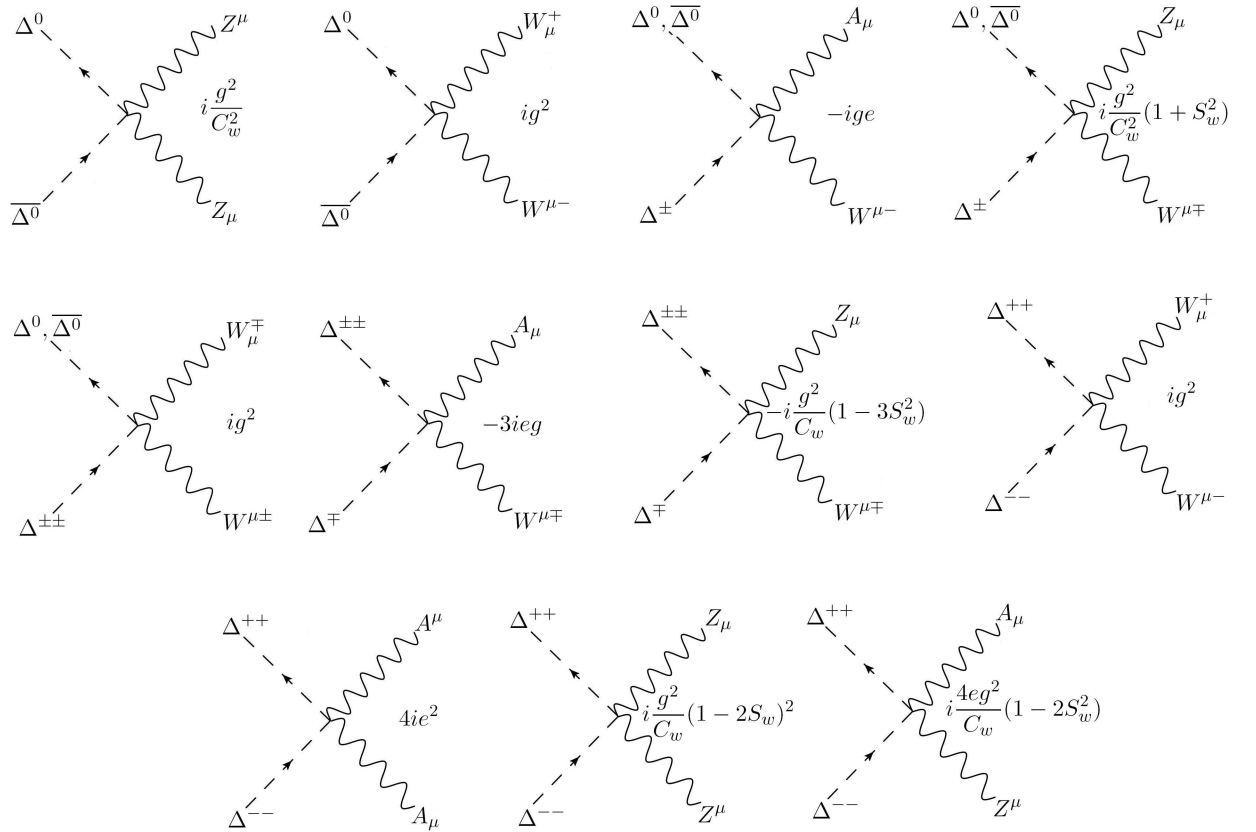


Figura D.1: Diagramas de Feynman Delta-Delta-Vector-Vector

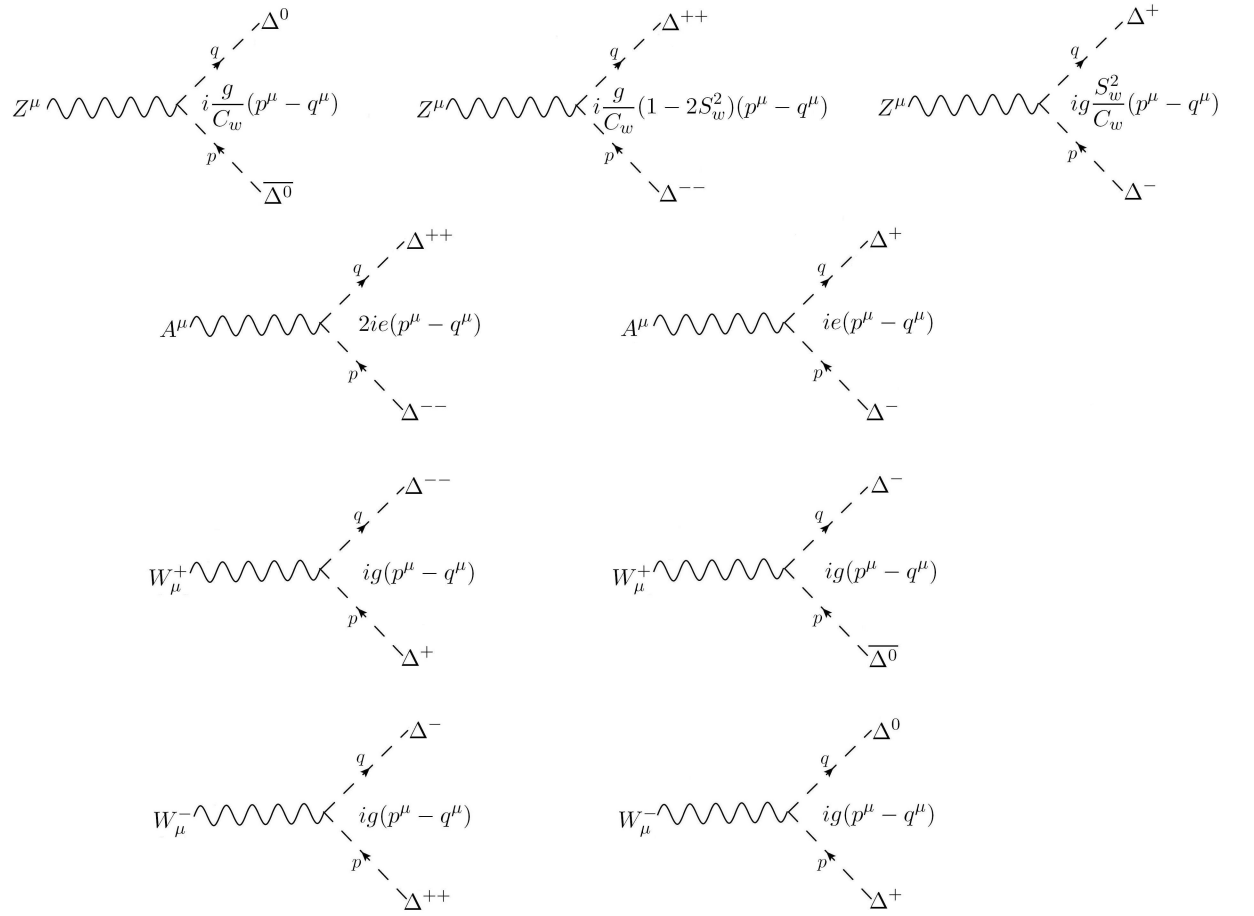


Figura D.2: Diagramas de Feynman Delta-Delta-Vector

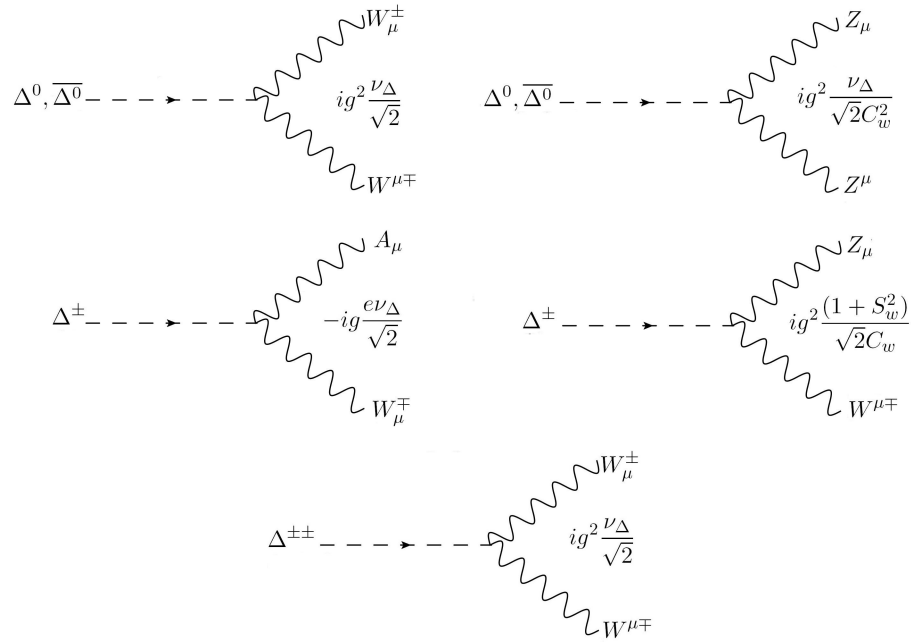


Figura D.3: Diagramas de Feynman Delta-Vector-Vector

Apéndice E

Parámetros utilizados en los cálculos numéricos

Se presentan los valores numéricos utilizados para la simulación numérica. Para la matriz U (matriz de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata),

$$U = V \text{diag}(1, e^{i\frac{\varphi_1}{2}}, e^{i\frac{\varphi_2}{2}}), \quad (\text{E.1})$$

con

$$V = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -c_{23}s_{12} - s_{13}s_{23}c_{12}e^{i\delta} & c_{23}s_{12} - s_{13}s_{23}s_{12}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{23}s_{12} - s_{13}c_{23}c_{12}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - s_{13}c_{23}s_{12}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (\text{E.2})$$

$$s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij}, \quad c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$$

Se toma [7]:

$$\theta_{12} = 34.5^\circ = 0.602\text{Rad}, \quad \theta_{13} = 0^\circ, \quad \theta_{23} = 42.3^\circ = 0.738\text{Rad}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \delta = 0^\circ \quad (\text{E.3})$$

obteniendo para (E.1):

$$V = \begin{pmatrix} 0.8242 & 0.5662 & 0 \\ -0.4189 & 0.6097 & 0.6728 \\ 0.3810 & -0.5545 & 0.7398 \end{pmatrix}, \quad (\text{E.4})$$

Las masas de los neutrinos en jerarquía normal (NH) están dadas por [7]:

$$\begin{aligned} m_1 &= 0\text{ev}, \\ m_2 &= 0.00876\text{ev}, \\ m_3 &= 0.0495\text{ev}, \end{aligned} \tag{E.5}$$

y en jerarquía inversa (IH) [7]:

$$\begin{aligned} m_1 &= 0.0487\text{ev}, \\ m_2 &= 0.0495\text{ev}, \\ m_3 &= 0\text{ev}, \end{aligned} \tag{E.6}$$

con un valor para $\nu_\Delta = 1\text{ev}$, que respeta los parámetros experimentales se obtiene para $Y^{nm} = \frac{1}{\sqrt{2}\nu_\Delta} U M_\nu U^T$, los siguientes resultados para NH y IH respectivamente son:

$$Y^{nm} = \begin{pmatrix} 0.0019 & 0.0021 & -0.00194 \\ 0.00213 & 0.0181 & 0.0153 \\ -0.00194 & 0.0153 & 0.0210 \end{pmatrix}, \tag{E.7}$$

$$Y^{nm} = \begin{pmatrix} 0.0346 & 0.00019 & -0.00017 \\ 0.00019 & 0.0190 & -0.0173 \\ -0.00017 & -0.0173 & 0.0157 \end{pmatrix}. \tag{E.8}$$

Apéndice F

Cinemática

La cinemática de una partícula se especifica por el vector momento, \vec{P} , y la masa en reposo, m . El vector momento relativista tiene cuatro componentes, $P_\mu = (E, \vec{P})$, donde E es la energía de la partícula. La relación entre E , P , y m es definida por la velocidad con respecto a c , $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Ahora si al ubicarse en el espacio de fase para una partícula no relativista, la ecuación para la partícula está dada por [39]:

$$d\vec{P} = dP_x dP_y dP_z = P^2 dP d\Omega = dP_{\parallel} P_T dP_T d\phi, \quad (\text{F.1})$$

donde el momento paralelo es P_{\parallel} y el perpendicular P_T . El elemento de ángulo solido es $d\Omega$ y el ángulo acimutal es ϕ . La generalización relativista de la ecuación anterior en el espacio de fase esta dado por:

$$d^4\delta(E^2 - P^2 - m^2) = d\vec{P}/E = P_T dP_T d\phi dy, \quad dy = dP_{\parallel}/E \quad (\text{F.2})$$

donde y es una variable cinemática llamada rapidez. El espacio de fase para una partícula es simplemente el volumen de momento cuatridimensional con una restricción, que la partícula tiene un conjunto de masas dadas por la función delta de Dirac, δ . La rapidez es el análogo relativista de la velocidad longitudinal. Si el momento transversal es limitado por la dinámica, se espera una distribución uniforme en y para cualquier partícula producida en colisiones inelásticas, si el momento para producir la partícula es pequeño. En general, se observa que casi todas las partículas se distribuyen uniformemente en la rapidez, en casi todos los ángulos (pequeña rapidez) con respecto al haz. La rapidez es la generalización relativista de la velocidad.

La rapidez es aproximada a la pseudorapidez si las masas de las partículas son pequeñas con respecto al momento transversal. Integrando la ecuación (F.2), $dy = dP_{\parallel} / \sqrt{P_{\parallel}^2 + P_T^2 + m^2}$, para encontrar la relación entre la energía y la rapidez:

$$E = m_T \cosh y, \quad m_T^2 = m^2 + P_T^2. \quad (\text{F.3})$$

Por consiguiente, para partículas no masivas, o partículas con masa mucho menor que el momento transversal, $m_T \sim P_T$, donde $P_T = E \sin \theta$:

$$\cosh y = 1/\sin \theta, \quad \sinh y = 1/\tan \theta, \quad \tanh y = \cos \theta. \quad (\text{F.4})$$

En este caso, se puede encontrar una relación entre el ángulo polar y la rapidez. Usando la ecuación (F.4) se muestra que:

$$e^{-y} = \tan(\theta/2), \quad (\text{F.5})$$

al despejar y se tiene una expresión para la pseudorapidez, η .

$$\eta = y = -\ln \tan(\theta/2), \quad (\text{F.6})$$

Ahora es necesario describir la dinámica de dos partículas. Asumimos que el marco de referencia usado es el marco del centro de masa de la colisión protón-protón. Como se observa en la figura (F.1), los partones tienen momento $p_1 = x_1 P$ y $p_2 = x_2 P$ respectivamente, donde P es el momento del protón en el centro de masa de la colisión p-p. La cantidad x es la fracción del momento del protón transportada por el partón o un punto fundamental que constituye la estructura del protón.

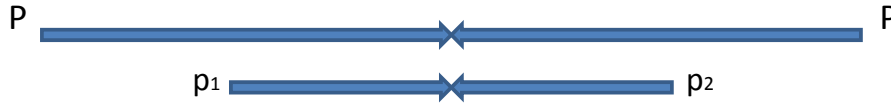


Figura F.1: Representación de un estado inicial en la dispersión partón-partón empezado de una colisión p-p en el centro de masa.

La masa, M , y la fracción de momento, x , de un estado inicial se encuentra por la conservación de la energía y el momento relativista. El cuadrimomento

$P_\mu = (E, \vec{P})$ tiene una “Longitud” de $P_\mu \cdot P^\mu = M^2$. La masa de un sistema de dos partones, asumiendo que los partones son no masivos y no tienen momento transversal esta dado por:

$$\begin{aligned} M^2 &= (p_1 + p_2)_\mu \cdot (p_1 + p_2)^\mu \sim P^2[(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2], \\ x &= p_{||}/P \sim 2p_{||}/\sqrt{s}. \end{aligned} \tag{F.7}$$

Un poco mas de algebra permite encontrar M y x para el estado inicial en terminos de x_1 y x_2 , $x_1 x_2 = M^2/s = \tau$, $x_1 - x_2 = x$. Un valor tipico $\langle x \rangle$, para la fracción de momento del partón producido en un estado de masa M en el centro de masa (\sqrt{s}) ocurre cuando $x_1 = x_2$ o cuando $\langle x \rangle$ es igual a $\sqrt{\tau}$.

Bibliografía

- [1] R.N. Mohapatra., and Pal. P.B., *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics*, World Scientific Lecture Notes in Physics (2004).
- [2] W. Pauli., *in Neutrino Physics*, Cambridge University Press (1994).
- [3] E. Fermi., Z. Phys. **88**, 161 (1934).
- [4] C.L. Cowan., et.al, Science **124**, 103 (1956).
- [5] S.L. Glashow., Nucl. Phys. **22**, 579 (1961);
Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, Phys. Rev. D**2**, 1285 (1970);
Salam, A., *Elementary Particle Theory*, Eds. W. Svartholm, Almquist and Wisksell (1968);
Weinberg, S., Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
- [6] Y. Fukuda., *et al.*[Super-Kamiokande Collaboration], Phys. Rev. Lett. **81**, 1562 (1998)
- [7] F. del Aguila and J.A. Aguilar-Saavedra., Nucl. Phys. B **813**, 22 (2009)
- [8] T.W.B. Kibble., *Symmetry Breaking in Non-Abelian Gauge Theories*, Phys. Rev. **155**, 5 (1996);
Coleman. S and E. Weinberg, Phys. Rev. D**7**, 6 (1973)
- [9] M.J. Herrero., *The Standard Model*, hep-ph/98122442 (1998)
- [10] G. Kane., *Modern Elementary Particle Physics*, Addison-Wesley (1987)
- [11] E. Abers and B Lee, *Gauge Theories*, Phys. Rev, 1-141 (1973)
- [12] Particle Data Group, D.E. Groom et., Review of Particle Physics (2010); <http://pdg.lbl.gov>

-
- [13] P. Langacker., (2007) *Grand Unified Theories and Proton Decay*, Phys. Rep **72** No 4, 185-385
 - [14] P. Fayet., *The Standard Model and Beyond*. LPTENS-98/45; hep-ph/9812300 (1998)
 - [15] S. Martin., *Supersimmetry primer*, hep-ph/9709356, vol. 3 Abr. (1999)
 - [16] T. Bowles and Gavrín., *The Status of the Solar neutrino problem*, Annu. Rev. Nucl. Part. Scie., **43**, 117 (1993)
 - [17] F. Pisano, and V. Pleitez, Phys. Rev. D**46**, 410 (1992); hep-ph/9206242, Jun. (1992);
PH. Frampton., Phys. Rev. Lett. **69**, 2889 (1992);
F. Pisano., hep-ph/9609358 v1, Sep. (1996).
 - [18] A. Doff, and F. Pisano, hep-ph/0009250 v1, Sep. (2000); hep-ph/0011087 v1, Nov. (2000).
 - [19] W. Greiner and B. Müller, *Quantum mechanics: symmetries*, Springer (1992).
 - [20] Ch. Ta- Pei and Li. L.G., *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford University Press (1984).
 - [21] B. Hatfield., *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*, Addison-Wesley (1992).
 - [22] C. Itzykson and J.B. Zuber., *Quantum Field Theory* , McGraw-Hill (1985).
 - [23] F.A. Ochoa., *Modelo $SU(3)_c \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$* , Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia (2003)
 - [24] M. C. Gonzalez and M. Maltoni, Phys. Rev D **77** (2008) 075010; arXiv:0712.4019 [hep-ph]
 - [25] T. Han, B. Mukhopadhyaya, Z. Si and K. Wang, Phys. Rev. D **76**, (2007) 075013; arXiv:0706.441 [hep-ph]
 - [26] A. G. Akeroyd, Cheng-Wei Chiang and Naveen Gaur., *Leptonic signatures of doubly charged Higgs boson production at the LHC*, (2010); arXiv:1009.2780 [hep-ph].

-
- [27] G. Ilia , O. Nobuchika and S. Qaisar, *Higgs Mass Bounds, Type II SeeSaw and LHC*, (2008) arXiv:0802.3257 [hep-ph].
- [28] V. D. Barger, H. Baer, W. Y. Keung and R. J. N. Phillips, Phys. Rev. D **26**, 218 (1982).
- [29] J. F. Gunion, J. Grifols, A. Mendez, B. Kayser and F. I. Olness, Phys. Rev. D **40**, 1546 (1989); J. F. Gunion, C. Loomis and K. T. Pitts, eConf C960625, LTH096 (1996) arXiv:9610237[hep-ph].
- [30] M. Muhlleitner and M. Spira, Phys. Rev. D **68** 68, 117701 (2003).
- [31] T. Han, B. Mukhopadhyaya, Z. Si and K. Wang, Phys. Rev. D **76**, 075013 (2007).
- [32] K. Huitu, J. Maalampi, A. Pietila and M. Raidal, Nucl. Phys. B **487**, 27 (1997); J. Maalampi and N. Romanenko, Phys. Lett. B **532**, 202 (2002).
- [33] B. Dion, T. Gregoire, D. London, L. Marleau and H. Nadeau, Phys. Rev. D **59**, 075006 (1999).
- [34] A. G. Akeroyd and M. Aoki, Phys. Rev. D **72**, 035011 (2005).
- [35] D. E. Acosta et al. [CDF Collaboration], Phys. Rev. Lett. 93, 221802 (2004).
- [36] V. M. Abazov et al. [D0 Collaboration], Phys. Rev. Lett. 93, 141801 (2004).
- [37] V. M. Abazov et al. [D0 Collaboration], Phys. Rev. Lett. 101, 071803 (2008).
- [38] T. Aaltonen et al. [The CDF Collaboration], Phys. Rev. Lett. 101, 121801 (2008).
- [39] M. Perelstein., *emphIntroduction to Collidier Physics*, arXiv:1002.0274 [hep-ph]
- [40] O.W. Greenberg., *The Parton Model*, arXiv:0805.2588v3 [hep-ph]
- [41] A. Pukhov., *Calculator for High Energy Physics User's manual*, (2005).